

Análise de Partição Modal de Energia: Teoria

José Paulo Bonatti – março de 2025

Introdução

Por que analisar a energética modal das análises e dos resultados de modelos para a atmosfera?

A energética da atmosfera é um dos componentes mais importantes de ser representado nos modelos numéricos. A partição de energia entre os modos normais de oscilação na condição inicial é fator determinante na evolução dos campos com o tempo, incluindo as trocas de energia entre modos, principalmente nas escalas de sua previsão. Na escala climática, as forçantes excitam ondas livres que ganham energia e passam a participar do processo de partição de energia. Então, é importante avaliar o quanto os modelos representam esses processos de partição de energia adequadamente, ou seja, fazer uma análise da energética modal do modelo e comparar com a sua contraparte das análises usadas como condições iniciais, ou com reanálises ou com análises finais.

Além disso, informações da distribuição espectral de energia da atmosfera são importantes para selecionar adequadamente as resoluções computacionais para resolver as equações prognósticas de previsão numérica de tempo ou clima. Estas informações são também úteis para fins de parametrizar os mecanismos de dissipação de energia em escala subgrade nas equações de previsão tanto em diferenças finitas quanto em forma espectral.

Como é feita a análise da energética modal?

O ideal seria analisar a energética com os campos na saída dos modelos, na grade 3D do modelo, utilizando os modos verticais correspondentes as grades horizontal e vertical do modelo. Porém, isso demandaria uma enorme quantidade adicional de armazenamento junto com as saídas do pós-processamento, o que em modelos de alta resolução pode tornar-se de alto custo. Além disso, a determinação dos modos de modelos pode ser complexa dependendo da grade e metodologia de integração espacial. Em modelos espectrais globais já é bem conhecida a forma de se obter os modos normais, porém em modelos com equações discretizadas fica muito difícil essa determinação; em modelos com grades não estruturadas a dificuldade fica maior ainda.

Portanto, foi desenvolvido um procedimento para analisar a decomposição vertical diretamente em coordenadas de pressão, pois a análise modal horizontal é independente de qual coordenada vertical é usada no modelo, o que permite fazer a análise da energética modal diretamente nos campos pós-processados e em análises ou reanálises, que normalmente tem grades horizontais em longitude e latitude e na vertical são níveis de pressão. Porém, há que se ter cuidado com a distribuição dos níveis de pressão: idealmente devem ser os mais próximos possíveis da grade vertical do modelo, incluindo níveis estratosféricos para se analisar melhor as trocas de energia entre modos verticais. Note que os modos normais calculados dessa forma não são os modos normais do modelo e, sim, da grade vertical do pós-processamento. Então, há que se ter cuidado na escolha dos níveis de pressão do pós-processamento quando se faz a análise da energética modal nas saídas pós-processadas.

Os modos verticais podem ser agrupados em classes de acordo com sua estrutura vertical e a distribuição horizontal de porcentagem de energia em modos verticais. Tal classificação é em termos do valor da altura equivalente H_n , onde n é a ordem do modo vertical tal que $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. O cálculo da altura equivalente será mostrado posteriormente e a classificação é dada por:

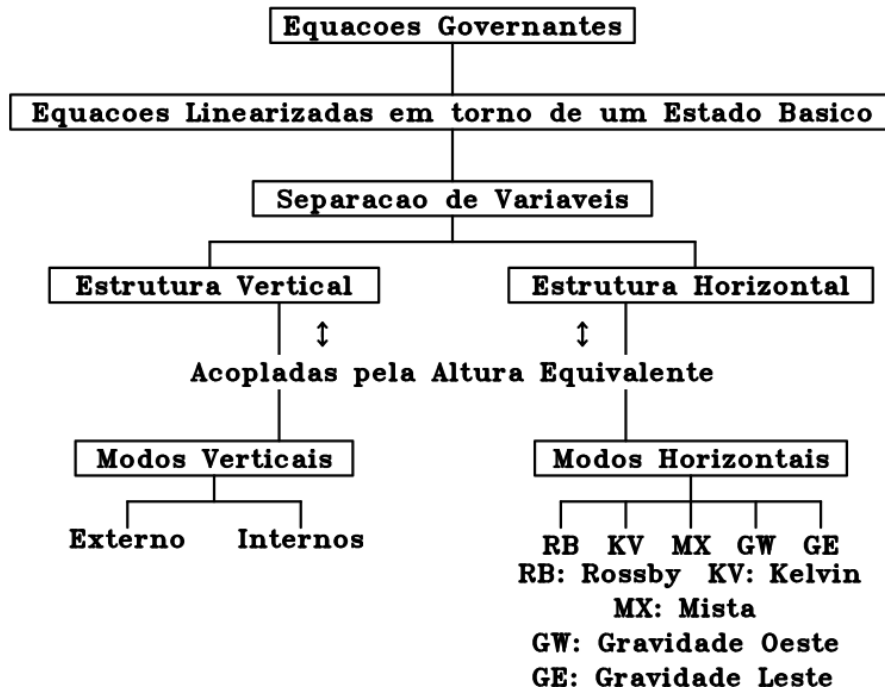
- Classe 0: modos tais que $H_n \geq 600 \text{ m}$;
- Classe 1: modos tais que $100 \text{ m} \leq H_n < 600 \text{ m}$;
- Classe 2: modos tais que $10 \text{ m} \leq H_n < 100 \text{ m}$;
- Classe 3: modos tais que $1 \text{ m} \leq H_n < 10 \text{ m}$;
- Classe 4: modos tais que $H_n < 1 \text{ m}$.

Ricardo Bonatti (2004) foi o primeiro a classificar os modos dessa forma e Borges Mendonça (2005) e Borges Mendonça e Bonatti (2008) consideraram da mesma forma, porém só definiram as 3 primeiras classes; posteriormente, Bonatti (2020) incluiu as outras duas classes. A classe 0 inclui o modo externo ou barotrópico, dado que sua estrutura vertical não apresenta zeros e a estrutura vertical dos demais modos desta classe tem zeros na estratosfera acima de 200 hPa, podendo ser considerados barotrópicos na troposfera, sendo importantes na energética do cinturão de altas de latitudes médias, as quais tem estrutura barotrópica equivalente. As demais classes possuem modos baroclínicos, sendo que a classe 1 tem modos cuja estrutura vertical tem máximos na alta (em torno de 250 hPa) e baixa (em torno de 850 hPa) troposfera com sinais trocados e possuindo valor nulo em níveis intermediários (em torno de 500 hPa). A classe 1 é importante nas regiões tropicais onde há convecção em grande escala. A classe 2 são modos importantes para processos de níveis mais baixos, incluindo a camada limite. A classe 3 e 4 tem também importância em baixos níveis, porém a 4 tem maior energia onde há topografia acentuada e processos de superfície importantes. Quando não se inclui níveis suficientes na estratosfera a classe 0, e mesmo a classe 1, ficam com poucos modos em comparação com o modelo e a análise fica prejudicada não refletindo a partição de energia que o modelo de fato fez. Isso porque, principalmente os de classe 0 e alguns da classe 1, tem variações relevantes na estratosfera e precisam de resolução nessa região para serem identificados.

Separação em Estruturas Vertical e Horizontal

Para representar a distribuição espectral de energia nas escalas horizontais (longitude e latitude) e vertical (altitude), são necessárias funções modos normais tridimensionais, que formem uma base completa e ortogonal, representando simultaneamente os campos de vento e de massa. Esta base de funções são as autofunções, com os correspondentes autovalores, do modelo de equações primitivas linearizadas. A descrição a seguir é baseada em Andrade (1994), Ricardo Bonatti (2004) e Borges Mendonça (2005). Os modos normais de oscilação na atmosfera são construídos reescrevendo as equações da continuidade e termodinâmica em uma nova forma. Os procedimentos para obter a decomposição das estruturas vertical e horizontal em modos normais são mostrados na figura 1.

Estas soluções são compostas de modos normais verticais e horizontais, que podem ser separados ao se considerar um estado básico em repouso e temperatura hidrostática dependendo apenas da vertical. A constante de separação, referida como altura equivalente, é o autovalor da equação da estrutura vertical a qual é ordinária de segundo grau e acopla os modos verticais e horizontais (figura 1). Para a horizontal, há tantos conjuntos de equações para vento zonal, vento meridional e altura quanto o número de autovalores verticais e a parte linear é formalmente idêntica às equações da água-rasa linearizadas, cujos autovalores são as frequências de oscilação permitidas pelo sistema. Os modos verticais são compostos por um modo externo (barotrópico divergente equivalente) e modos internos (baroclínicos). Há tantos modos quanto o número de camadas considerados na vertical. Os modos horizontais são compostos de ondas de Rossby, Kelvin, mista Rossby-gravidade e gravidade inercial com propagação para leste e para oeste, que são conhecidas como funções de Hough. As autofunções na vertical e na horizontal formam bases independentes de funções adequadas para a representação da energética atmosférica em escala global.



Adaptada de: Ko et al., 1989.

Figura 1 – Procedimento para obter os modos verticais e horizontais.

Será discutida a seguir a separação de variáveis considerando a pressão como coordenada vertical. A discussão seguirá Ambacher e Waite (2020) e Marques et al (2020), os quais se basearam em Daley (1991). As equações, em coordenadas horizontais esféricas e verticais de pressão, para o movimento zonal, movimento meridional, continuidade, termodinâmica e hidrostática podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \varphi v + g \frac{\partial z}{a \cos \varphi \partial \lambda} = R_u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \sin \varphi u + g \frac{\partial z}{a \partial \varphi} = R_v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \varphi)}{a \partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{a \cos \varphi \partial \lambda} + v \frac{\partial T}{a \partial \varphi} + \left(\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{R_d T}{c_p p} \right) \omega = \frac{\dot{Q}}{c_p} + F_T, \quad (4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = - \frac{R_d T}{p g}. \quad (5)$$

Usando a hidrostática (5) na equação da energia termodinâmica (6) e dividindo por $\tilde{\Gamma}$, obtém-se a equação da energia termodinâmica hidrostática como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial z}{\partial p} \right) + u \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \lambda} \left(\frac{1}{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial z}{\partial p} \right) + v \frac{\partial}{a \partial \varphi} \left(\frac{1}{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial z}{\partial p} \right) + \omega \tilde{\Gamma} = \\ - \frac{p g}{R_d \tilde{\Gamma}} \left(\frac{\dot{Q}}{c_p} + F_T \right) = R_T, \end{aligned} \quad (6)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}(p) = \frac{R_d}{p g} \left(\frac{R_d}{C_p} \frac{\tilde{T}(p)}{p} - \frac{d\tilde{T}(p)}{dp} \right), \quad (7)$$

ω' (dp/dt) é a velocidade vertical em coordenadas de pressão, p é a pressão, z é altura geopotencial, λ é a longitude, φ é a latitude, $2\Omega \sin \varphi$ é o parâmetro de Coriolis, Ω é a taxa de rotação da Terra, a é o raio médio da Terra, R_d é a constante do gás para o ar seco, C_p é o calor específico a pressão constante, g a aceleração da gravidade, R_u e R_v são as resultantes que compõem a parte não linear das equações do movimento zonal e meridional, respectivamente, $\dot{Q}$ é a taxa de calor (aquecimento diabático), F_T é o termo relativo à dissipação de calor, $\tilde{\Gamma}(p)$ é um parâmetro de estabilidade estática dependendo só da pressão e $\tilde{T}(p)$ é a temperatura hidrostática do estado básico. O til representa o estado básico e as linhas as perturbações onde $z' = z - \tilde{z}(p)$ tal que

$$\frac{d\tilde{z}}{dp} = - \frac{R_d \tilde{T}}{p g}, \quad (8)$$

e

$$\frac{\partial z'}{\partial p} = - \frac{R_d T'}{p g}, \quad (9)$$

Diferenciando-se (12) com relação a p e utilizando a equação da continuidade (3), chega-se finalmente a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\bar{\Gamma}} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \right] - \left[\frac{\partial u}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \varphi)}{a \partial \varphi} \right] = \frac{\partial R_T}{\partial \sigma} = -R_h, \quad (10)$$

com R_h representando a derivada vertical dos termos não-lineares, do aquecimento diabático e dos forçantes (como o resfriamento).

Considerando que as variáveis de vento horizontal e altura geopotencial possam ser separadas em uma dependência horizontal, longitude e latitude, e no tempo (λ, φ, t) e na vertical (p) , estas podem ser expressas por:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ z' \end{bmatrix} (\lambda, \varphi, p, t) = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{h} \end{bmatrix} (\lambda, \varphi, t) \Psi(p), \quad (11)$$

onde $\hat{u}, \hat{v}$ e $\hat{h}$ representam a estrutura horizontal e Ψ representa a estrutura vertical. Os forçantes também podem ser expandidos em uma estrutura horizontal e uma vertical, tal que:

$$\begin{bmatrix} R_u \\ R_v \\ R_h \end{bmatrix} (\lambda, \varphi, p, t) = \begin{bmatrix} \hat{R}_u \\ \hat{R}_v \\ \hat{R}_h \end{bmatrix} (\lambda, \varphi, t) \Psi(p), \quad (12)$$

Usando (11) e (12) em (1), (2) e (10), as equações para essas variáveis são dadas por:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - f \hat{v} + g \frac{\partial \hat{h}}{a \cos \varphi \partial \lambda} = \hat{R}_u, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + f \hat{u} + g \frac{\partial \hat{h}}{a \partial \varphi} = \hat{R}_v, \quad (14)$$

e

$$\frac{1}{\Psi} \left(\frac{1}{\tilde{\Gamma}} \frac{d\Psi}{dp} \right) = \frac{1}{\partial h / \partial t} \left(\frac{\partial \hat{u}}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial (\hat{v} \cos \varphi)}{a \partial \varphi} - \hat{R}_h \right) = -\frac{1}{H}, \quad (15)$$

onde $-1/H$ é a constante de separação definida convenientemente, H é conhecida como altura equivalente, pois a segunda igualdade da equação 15 leva a

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + H \left(\frac{\partial \hat{u}}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial (\hat{v} \cos \varphi)}{a \partial \varphi} \right) = \hat{R}_h, \quad (16)$$

que juntamente com as equações 13 e 14 representam as equações da água rasa linearizadas dando a estrutura horizontal para cada altura equivalente H se a divergência horizontal não for nula (equação 16). As equações 13, 14 e 15 representam a estrutura horizontal.

O primeiro termo juntamente com o terceiro da equação 15 dá a equação da estrutura vertical como

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\tilde{\Gamma}} \frac{d\Psi}{dp} \right) + \frac{1}{H} \Psi = 0, \quad (17)$$

Então, H é o autovalor de 17 e Ψ é o autovetor, o que caracteriza um conjunto de valores tanto para a altura equivalente, quanto a sua correspondente estrutura vertical. Como as equações das estruturas horizontal e vertical foram estabelecidas baseadas em equações linearizadas, tem a mesma forma quando outras coordenadas verticais são utilizadas, como por exemplo, a coordenada sigma que modula a topografia (Staniforth et al, 1985).

Para resolver a equação 17 é necessário estabelecer duas condições de contorno, que serão consideradas como tampas rígidas dada por $w = dz/dt = 0$ no topo e na superfície, resultando em:

$$\frac{d\Psi}{dp} + \frac{P_S g \tilde{\Gamma}}{R_d T_S} \Psi = 0, \text{ em } p = p_S \quad (18)$$

$$\frac{d\Psi}{dp} + \frac{P_T g \tilde{\Gamma}}{R_d T_T} \Psi = 0, \text{ em } p = p_T, \quad (19a)$$

onde os subscritos S e T representam, respectivamente, a superfície e o topo do modelo (Daley, 1991). Embora condições de contorno de tampa rígida não sejam exatamente realistas para o contorno superior, são convenientes e consistentes com as condições de contorno com os modelos comumente utilizados. Para minimizar o problema da condição de contorno superior, e seguindo Kashara e Puri (1981), a condição de contorno no topo torna-se:

$$\frac{d\Psi}{dp} = \text{finito}, \text{ em } p = p_T, \quad (19b)$$

e, em geral, esse valor finito pode ser considerado nulo, sem perda de generalidade.

Pode-se mostrar que a equação 17 com as condições de contorno 18 e 19 formam um problema padrão de Sturm–Liouville (veja prova em Bonatti, 2020) e definem a estrutura vertical, a qual, portanto, forma uma base completa. Como já ressaltado, a solução, então, forma um conjunto de modos normais verticais $\Psi_n(p)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, que são ortogonais na norma L^2 em p , com correspondentes autovalores H_n que representam a altura equivalente do n – ésimo modo. Pode-se mostrar também que os autovalores são reais e diferentes entre si se o parâmetro de estabilidade estática for positivo em todo o domínio vertical (veja em Bonatti, 2020).

Pode-se normalizar $\Psi_n(p)$ de modo que seja uma base ortonormal:

$$\frac{1}{p_S} \int_{p_S}^{p_T} \Psi_n(p) \Psi_m(p) dp = \delta_{nm}, \quad (20)$$

onde δ_{nm} é o delta de Kronecker ($\delta_{nn} = 1$; $\delta_{nm} = 0$, $n \neq m$).

Solução Numérica da Equação da Estrutura Vertical (Vertical_Modes)

A equação 17 permite solução analítica para considerações especiais sobre a estabilidade estática $\tilde{\Gamma}$ (veja Apêndice A). Porém, em geral, sua aplicação mais importante é de forma discreta. Como ressaltado por Staniforth et al (1985), as equações da estrutura vertical são formalmente semelhantes e, então, pode-se usar o mesmo tipo de discretização vertical que Kasahara e Puri (1981) utilizaram para resolver o caso com coordenada vertical sigma. A grande vantagem dessa metodologia é que leva a uma matriz simétrica para o cálculo dos autovalores e autovetores.

Para a discretização da equação 17 é necessário definir uma grade vertical no domínio de pressão, a qual está apresentada na figura 2. Os níveis de pressão com linhas tracejadas representam o centro da camada e é onde a estrutura vertical e o estado básico estão definidos. O estado básico é representado por um perfil vertical médio de temperatura da atmosfera padrão e entra na equação do parâmetro de estabilidade estática, a qual aparece explicitamente na equação da estrutura vertical 17. Caso se queira a altura geopotencial do estado básico, primeiramente será procedida a discretização vertical da equação hidrostática 8, a qual fornece a altura geopotencial em função da temperatura. Considerando que $\tilde{z}$ está nos mesmos níveis que $\tilde{\Psi}$ na figura 2, a discretização da hidrostática tem, em geral, a seguinte forma:

$$\frac{\tilde{z}_k - \tilde{z}_{k-1}}{\Delta p_k} = - \frac{R_d (\tilde{T}_k + \tilde{T}_{k-1})}{g (p_k + p_{k-1})}.$$

Então, pode-se escrever para a camada mais próxima à superfície:

$$\tilde{z}_K = \tilde{z}_S + \frac{R_d \Delta p_K}{g} \frac{\tilde{T}_S}{2 p_S}, \quad (21a)$$

onde $\tilde{z}_S = 0$, dado que não se considera a topografia na análise dos modos normais. Para as camadas $k = K, K - 1, \dots, 3, 2$, tem-se:

$$\tilde{z}_{k-1} = \tilde{z}_k + \frac{R_d \Delta p_k}{g} \frac{(\tilde{T}_{k-1} + \tilde{T}_k)}{(p_k + p_{k-1})}. \quad (21b)$$

Para a camada do topo chega-se a:

$$\tilde{z}_T = \tilde{z}_1 + \frac{R_d \Delta p_1}{g} \frac{\tilde{T}_T}{2 p_T}, \quad (21c)$$

onde $p_T = p_1 - 1/2 \Delta p_2$, para $p_1 > 1/2 \Delta p_2$, caso contrário $p_T = p_1/2$, e $p_{K+1} = p_S + (p_S - p_K)$, com p_S da atmosfera padrão considerada ($p_K < p_S$) , e

$$\Delta p_1 = 2 (p_1 - p_T), \quad (22a)$$

$$\Delta p_k = p_k - p_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, K, \quad (22b)$$

$$\Delta p_{K+1} = 2(p_S - p_K). \quad (22c)$$

Pode-se, então. escrever a forma discretizada da estabilidade estática como:

$$\tilde{\Gamma}_1 = \frac{R_d}{p_T g} \left[\frac{R_d}{p_T c_p} \tilde{T}_T - \frac{(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_T)}{1/2 \Delta p_1} \right] \quad (23a)$$

para o topo $k = T$,

$$\tilde{\Gamma}_k = \frac{R_d}{p_k g} \left[\frac{R_d}{p_k c_p} \frac{(\tilde{T}_{k-1} + \tilde{T}_k)}{2} - \frac{(\tilde{T}_k - \tilde{T}_{k-1})}{\Delta p_k} \right] \quad (23b)$$

para $k = 2, 3, \dots, K$, e

$$\tilde{\Gamma}_{K+1} = \frac{R_d}{p_S g} \left[\frac{R_d}{p_S c_p} \tilde{T}_S - \frac{(\tilde{T}_S - \tilde{T}_K)}{1/2 \Delta p_{K+1}} \right] \quad (23c)$$

para a superfície $k = S$.

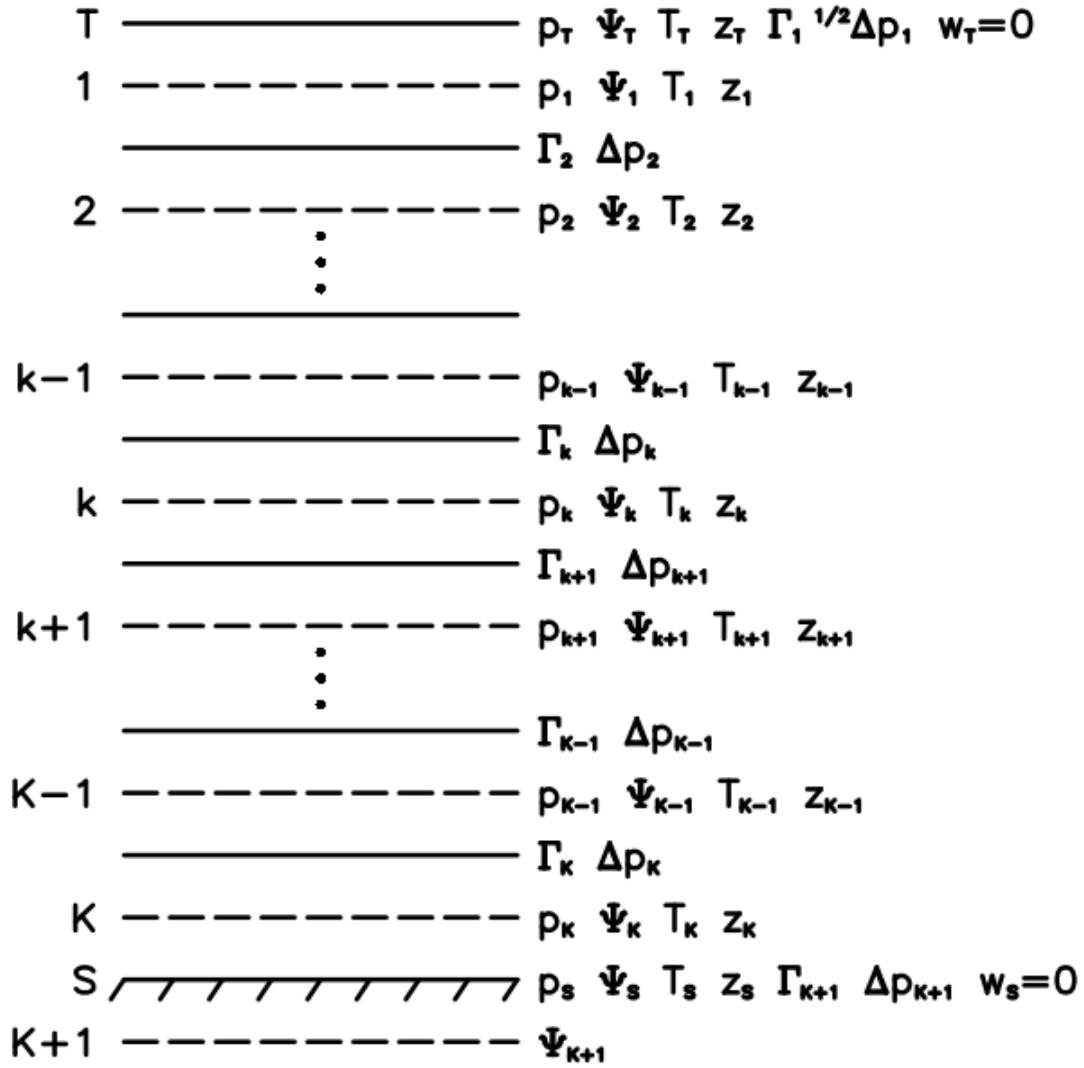


Figura 2 – Representação da discretização das variáveis na vertical. As linhas tracejadas mostram os níveis de pressão (centro da camada) onde a equação 12 é resolvida.

Será agora apresentada a discretização da equação 17, que representa a estrutura vertical, como:

$$\frac{2}{(\Delta p_1 + \Delta p_2)} \left[\tilde{\Gamma}_2^{-1} \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{\Delta p_2} - 0 \right] + H^{-1} \Psi_1 = 0 \quad (24a)$$

para $k = 1$,

$$\frac{2}{(\Delta p_k + \Delta p_{k+1})} \left[\tilde{\Gamma}_{k+1}^{-1} \frac{(\Psi_{k+1} - \Psi_k)}{\Delta p_{k+1}} - \tilde{\Gamma}_k^{-1} \frac{(\Psi_k - \Psi_{k-1})}{\Delta p_k} \right] + H^{-1} \Psi_k = 0, \quad (24b)$$

para $k = 2, 3, \dots, K-1$, e

$$\frac{2}{(\Delta p_K + \Delta p_{K+1})} \left[\tilde{\Gamma}_S^{-1} \frac{(\Psi_{K+1} - \Psi_K)}{\Delta p_{K+1}} - \tilde{\Gamma}_K^{-1} \frac{(\Psi_K - \Psi_{K-1})}{\Delta p_K} \right] + H^{-1} \Psi_K = 0, \quad (24c)$$

para $k = K$.

A condição de contorno 19b foi usada em 24a, representada pelo zero dentro do colchete. A discretização da condição de contorno 18 permite a obtenção de Ψ_{K+1} que surge em 24c, como mostrado a seguir:

$$\frac{\Psi_{K+1} - \Psi_K}{\Delta p_{K+1}} = -\frac{1}{2} a (\Psi_{K+1} + \Psi_K), \quad (25a)$$

onde $a = g p_s \tilde{\Gamma}_{K+1} / (R_d \tilde{T}_s)$. De 25a pode-se obter Ψ_{K+1} em função de Ψ_K e substituindo novamente em 25a chega-se a:

$$\frac{\Psi_{K+1} - \Psi_K}{\Delta p_{K+1}} = -\frac{b}{\Delta p_{K+1}} \Psi_K, \quad (25b)$$

onde $b = a \Delta p_{K+1} / (1 + 1/2 a \Delta p_{K+1})$. A equação 25b pode ser utilizada no primeiro termo entre colchetes da equação 24c.

Considerando a condição de contorno inferior 25b, pode-se mostrar através do sistema 24, que as autofunções $\Psi_{n,k}$ e $\Psi_{m,k}$ em níveis de pressão k correspondentes aos autovalores H_n^{-1} e H_m^{-1} , quando $H_n^{-1} \neq H_m^{-1}$, são ortogonais no seguinte sentido:

$$\sum_{k=1}^K \Psi_{n,k} \Psi_{m,k} 1/2 (\Delta p_k + \Delta p_{k+1}) = 0, \quad (26)$$

para $m \neq n$. Esta condição de ortogonalidade sugere que a definição adequada para a função da estrutura vertical em diferenças finitas é

$$\Phi_{n,k} = \Psi_{n,k} [1/2 (\Delta p_k + \Delta p_{k+1})]^{1/2}. \quad (27)$$

Com essa definição de Φ_k o sistema 24 pode ser escrito em forma matricial como:

$$\underline{\mathbf{M}} \mathbf{\Phi} = H^{-1} \mathbf{\Phi}, \quad (28)$$

onde $\mathbf{\Phi}$ é o autovetor

$$\mathbf{\Phi} = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_k \ \dots \ \Phi_{K-1} \ \Phi_K]^T. \quad (29)$$

Considerando que

$$\left. \begin{aligned} C_k &= \frac{[\tilde{\Gamma}_{k+1}]^{-1}}{\Delta p_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1 \\ C_K &= \frac{b [\tilde{\Gamma}_{K+1}]^{-1}}{\Delta p_{K+1}} \\ d_k &= [1/2 (\Delta p_k + \Delta p_{k+1})]^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \right\}, \quad (30)$$

a matriz $\underline{\mathbf{M}}$ é dada por

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{d_1^2} & \frac{-C_1}{d_1 d_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-C_1}{d_1 d_2} & \frac{(C_1+C_2)}{d_2^2} & \frac{-C_2}{d_2 d_3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \frac{-C_{k-1}}{d_{k-1} d_k} & \frac{(C_{k-1}+C_k)}{d_k^2} & \frac{-C_k}{d_k d_{k+1}} & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-C_{K-2}}{d_{K-2} d_{K-1}} & \frac{(C_{K-2}+C_{K-1})}{d_{K-1}^2} & \frac{-C_{K-1}}{d_{K-1} d_K} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-C_{K-1}}{d_{K-1} d_K} & \frac{(C_{K-1}+C_K)}{d_K^2} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Claramente a matriz $\underline{\mathbf{M}}$ da equação 28 é tri-diagonal simétrica, então, os autovalores H^{-1} e a associada autofunção Φ são reais. Realizando uma normalização adequada dos autovetores, a condição de ortogonalidade de Φ pode ser expressa por

$$\sum_{k=1}^K \Phi_{n,k} \Phi_{m,k} = \delta_{nm}, \quad (32)$$

Desde que a matriz $\underline{\mathbf{M}}$ é simétrica de ordem K , obtém-se K autovalores H^{-1} e os associados autovetores Φ . Cada autovalor corresponde a uma altura equivalente H , ou seja, obtém-se K alturas equivalentes. A maior delas, da ordem de 10 km para a atmosfera padrão, é conhecida como modo externo; as demais são os modos internos.

Solução da Estrutura Horizontal (Hough_Functions)

Para as equações da estrutura horizontal (13, 14 e 16) a solução é mais complexa e a sua apresentação a seguir segue Bonatti et al (1983) e Andrade (1994). Para a solução das equações que compõem a estrutura horizontal desenvolveu-se uma versão atualizada do modelo espectral barotrópico de Bonatti e Silva Dias (1983). Modelos espectrais normalmente utilizam harmônicos esféricos como base de expansão, que são as autofunções da equação barotrópica não-divergente, porém, modelo como os de Bonatti e Silva Dias utilizam como base de expansão as funções de Hough, que são as autofunções da versão linearizada das equações da estrutura horizontal. A expansão em funções de Hough produz melhores resultados pois resolve a parte linear analiticamente e permite o ajuste inicial dos campos de vento e massa (inicialização), evitando o surgimento de ondas de gravidades espúrias com amplitudes irrealistas. As funções de Hough são as soluções das equações da estrutura horizontal linearizadas, que são formalmente semelhantes às equações da água rasa, para um estado básico em repouso, com temperatura hidrostática dependendo só da vertical e com uma altura equivalente fixa. Essas autofunções são estabelecidas para um modo vertical fixo (H_n fixo ou n fixo) e para um par (s, ℓ) , onde s é o número de onda zonal, ℓ é o índice meridional do modo horizontal e com 5 tipos de ondas, com r representando o tipo de onda horizontal da seguinte forma:

- $r = 1$ – onda de Rossby,
- $r = 2$ – onda de Kelvin,
- $r = 3$ – onda mista Rossby-gravidade,
- $r = 4$ – onda de gravidade para oeste,
- $r = 5$ – onda de gravidade para leste.

Para a solução das equações da estrutura horizontal 13, 14 e 16 é necessária uma adimensionalização utilizando a seguinte matriz:

$$\underline{\mathbf{S}}_n = \begin{bmatrix} (g H_n)^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & (g H_n)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & H_n \end{bmatrix}, \quad (32)$$

com $(g H_n)^{1/2}$ representando a maior velocidade de grupo para o modo n , a qual adimensionaliza o vento zonal e vento meridional e H_n adimensionaliza a altura.

Considerando que as oscilações livres possuem dependência temporal do tipo onda plana na forma $\exp(i \omega t)$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_n \\ \hat{v}_n \\ \hat{h}_n \end{bmatrix}(\lambda, \varphi, t) = \underline{\mathbf{S}}_n \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ h_n \end{bmatrix}(\lambda, \varphi) \exp(i \omega t), \quad (33)$$

onde os símbolos sem chapéu representam as amplitudes adimensionais de oscilação. A frequência para cada modo horizontal é ω , adimensionalizada por 2Ω ; o tempo e os termos forçantes também é adimensionalizado por 2Ω , sendo Ω a velocidade angular da Terra. Dado que o termo $i \omega$ é imaginário puro (ω é real) as oscilações serão senoidais no tempo, e os modos verticais (u_n, v_n, h_n) são ortogonais (Kasahara, 1976).

O sistema de equações 13, 14 e 16 em sua forma vetorial e adimensional fica expresso por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_n + \underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{A}_n = \mathbf{N}_n + \mathbf{F}_n, \quad (34)$$

onde

$$\mathbf{A}_n(\lambda, \varphi) = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ h_n \end{bmatrix}(\lambda, \varphi, t), \quad (35)$$

$$\mathbf{N}_n(\lambda, \varphi) = \begin{bmatrix} N_n^u \\ N_n^v \\ N_n^h \end{bmatrix}(\lambda, \varphi, t), \quad (36)$$

$$\mathbf{F}_n(\lambda, \varphi) = \begin{bmatrix} F_n^u \\ F_n^v \\ F_n^h \end{bmatrix}(\lambda, \varphi, t) \quad (37)$$

e

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \frac{\vartheta_n}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \sin \varphi & 0 & \vartheta_n \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\vartheta_n}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\vartheta_n}{\cos \varphi} \frac{\partial [(\) \cos \varphi]}{\partial \varphi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

O parâmetro adimensional ϑ_n é dada por:

$$\vartheta_n = \frac{(gH_n)^{1/2}}{2\Omega a} = \epsilon_n^{-1/2}, \quad (39)$$

que caracteriza a natureza do escoamento horizontal, e representa a razão entre a velocidade de fase da onda de gravidade pura, para cada modo vertical n , e a velocidade linear da superfície terrestre no equador, sendo a o raio médio da Terra e ϵ é o parâmetro de Lamb.

O veto $\underline{\underline{N}}_n$ engloba os termos de advecção e os termos métricos. O vetor forçante $\underline{\underline{F}}_n$ representa fontes e sumidouros de energia, ou seja, os termos da dissipação de momentum horizontal (atrito), esfriamento e o aquecimento diabático (fontes de calor). No caso homogêneo em que $\underline{\underline{N}}_n = \underline{\underline{F}}_n = 0$, ausência de fontes e sumidouros e referenciado como equações de maré de Laplace, a solução analítica pode ser obtida encontrando-se as funções de Hough. Nesse caso o operador $\underline{\underline{L}}$ e as funções de Hough $\mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell}$ satisfazem a seguinte relação:

$$(\underline{\underline{L}} - i \omega_{r,n}^{s,\ell} \underline{\underline{I}}) \mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell} = 0, \quad (40)$$

onde $\underline{\underline{I}}$ é a matriz identidade, $\omega_{r,n}^{s,\ell}$ é a autofrequência real e adimensional (pela natureza do operador $\underline{\underline{L}}$) e $\mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell}$ é o harmônico de Hough correspondente ao modo horizontal de oscilação (s, ℓ, r, n) com a seguinte condição de ortogonalidade:

$$(\omega_{r,n}^{s,\ell} - \omega_{r',n}^{s',\ell'}) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell} [\mathcal{H}_{r',n}^{s',\ell'}]^* d\lambda d\mu = 0, \quad (41)$$

onde o asterisco significa complexo conjugado e $\mu = \sin \varphi$. Essa expressão mostra que o harmônico $\mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell}$ associando a frequência $\omega_{r,n}^{s,\ell}$ deve ser ortogonal ao harmônico $\mathcal{H}_{r',n}^{s',\ell'}$ associado a frequência $\omega_{r',n}^{s',\ell'}$. O caso em que $\omega_{r,n}^{s,\ell} = \omega_{r',n}^{s',\ell'} = 0$ (degeneração) leva a necessidade de se construir um conjunto ortonormal e completo (Holl, 1970) de modos geostróficos (Kasahara, 1978). Este caso particular será analisado posteriormente.

A partir de 41 pode ser mostrado que a relação de ortonormalidade dos harmônicos de Hough $\mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell}(\lambda, \varphi)$ é dada por (ver em Bonatti, 2020):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell} \cdot [\mathcal{H}_{r',n}^{s',\ell'}]^* d\mu d\lambda = \delta_{rr'} \delta_{ss'} \delta_{\ell\ell'}, \quad (42)$$

onde δ_{jk} é o delta de Kronecker. Note que a relação 42 é válida para um modo vertical n fixo, representando uma base completa para os modos horizontais.

A função vetorial de Hough pode ser escrita usando a transformada de Fourier como:

$$\mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell}(\lambda, \mu) = \boldsymbol{\Theta}_{r,n}^{s,\ell}(\mu) \exp(is\lambda) = \begin{bmatrix} \hat{U}_{r,n}^{s,\ell} \\ -i\hat{V}_{r,n}^{s,\ell} \\ \hat{Z}_{r,n}^{s,\ell} \end{bmatrix}(\mu) \exp(is\lambda), \quad (43)$$

onde $\boldsymbol{\Theta}_{r,n}^{s,\ell}(\mu)$ é a função vetorial de Hough (veja definição em Bonatti, 2020) e as três componentes velocidade zonal ($\hat{U}_{r,n}^{s,\ell}$), velocidade meridional ($\hat{V}_{r,n}^{s,\ell}$) e altura geopotencial ($\hat{Z}_{r,n}^{s,\ell}$) são função apenas da latitude (φ); o fator i incluído na velocidade meridional introduz uma diferença de fase ($\pi/2$) entre esta e as demais componentes, facilitando a álgebra, uma vez que este procedimento torna as equações para obtenção da função vetorial de Hough reais.

Usando 43 em 42 pode-se mostrar que:

$$\int_{-1}^1 \boldsymbol{\Theta}_{r,n}^{s,\ell}(\mu) \left[\boldsymbol{\Theta}_{r',n}^{s,\ell'}(\mu) \right]^* d\mu = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{r,r'}, \quad (44)$$

Que representa a condição de ortonormalidade para a função vetorial de Hough, válida para qualquer s fixo.

A obtenção dos modos normais de oscilação (modos livres), as funções de Hough, do sistema da equação linearizado da equação 34 ($\mathbf{N}_n = \mathbf{F}_n = 0$) é feita expressando os campos de vento zonal (u) e vento meridional (v) em termos da função de corrente (ψ) e do potencial de velocidade (χ) usando as relações de Helmholtz. As variáveis das equações da estrutura horizontal assim modificadas são expandidas e em funções associadas de Legendre normalizadas e o sistema encontrado para os coeficientes de expansão é dividido em sua parte simétrica e antissimétrica em relação ao Equador.

Pode-se, então, expressar $\hat{u}_n$ e $\hat{v}_n$ em termos de $\hat{\chi}_n$ e $\hat{\psi}_n$ usando o teorema de Helmholtz da seguinte forma:

$$\hat{u}_n = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \hat{\chi}_n}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial \varphi} \quad (45)$$

e

$$\hat{v}_n = \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{\chi}_n}{\partial \varphi} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial \lambda} \quad (46)$$

O objetivo é sair do sistema $(\hat{u}_n, \hat{v}_n, \hat{h}_n)$ para o sistema $(\hat{\chi}_n, \hat{\psi}_n, \hat{h}_n)$, utilizando as equações da vorticidade e da divergência substituindo as equações do momentum. O novo sistema em forma adimensional torna-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{\chi}_n \\ \hat{\psi}_n \\ \hat{h}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (gH_n/2\Omega) \chi_{r,n}^{s,\ell} \\ (gH_n/2\Omega) \psi_{r,n}^{s,\ell} \\ (H_n) Z_{r,n}^{s,\ell} \end{bmatrix} \exp[i(s\lambda - \omega_{r,n}^{s,\ell} t)], \quad (47)$$

onde as variáveis adimensionais (sem chapéu) são funções apenas da latitude φ . Substituindo a equação 47 em 45 e 46 e introduzindo o resultado nas equações 13, 14 e 16 obtêm-se um novo sistema de três equações para cada n , que representa a estrutura horizontal na forma divergência-vorticidade (Kasahara, 1978), dado por:

$$(\omega_{r,n}^{s,\ell} \nabla^2 - s)(i \chi_{r,n}^{s,\ell}) + (\mu \nabla^2 + D) \psi_{r,n}^{s,\ell} = \nabla^2 Z_{r,n}^{s,\ell}, \quad (48)$$

$$(\omega_{r,n}^{s,\ell} \nabla^2 - s) \psi_{r,n}^{s,\ell} + (\mu \nabla^2 + D)(i \chi_{r,n}^{s,\ell}) = 0, \quad (49)$$

$$\omega_{r,n}^{s,\ell} Z_{r,n}^{s,\ell} = -\vartheta_n^2 \nabla^2(i \chi_{r,n}^{s,\ell}), \quad (50)$$

onde:

$$D(\) \equiv (1 - \mu^2) \frac{d(\)}{d\mu}, \quad (51)$$

e

$$\nabla^2(\) = \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d(\)}{d\mu} \right] - \frac{s^2}{(1 - \mu^2)}. \quad (52)$$

Veja Apêndice B para maiores detalhes sobre as funções associadas de Legendre e seu cálculo. Não há funções simples que satisfaçam diretamente as equações 48, 49 e 50. Por isso uma solução sua solução deve ser construída em termos de uma série ortonormal de funções conhecidas, como por exemplo as funções associadas de Legendre normalizadas $[P_m^s(\mu)]$. Essas funções satisfazem o operador Laplaciano, permitindo o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{bmatrix} \chi_{r,n}^{s,\ell} \\ \psi_{r,n}^{s,\ell} \\ Z_{r,n}^{s,\ell} \end{bmatrix} = \sum_{m=s}^{s+M} \begin{bmatrix} i A_{r,n,m}^{s,\ell} \\ B_{r,n,m}^{s,\ell} \\ C_{r,n,m}^{s,\ell} \end{bmatrix} P_m^s(\mu), \quad (53)$$

onde M representa o truncamento romboidal da série e $A_{r,n,m}^{s,\ell}$, $B_{r,n,m}^{s,\ell}$ e $C_{r,n,m}^{s,\ell}$ são os coeficientes de expansão das funções de Hough.

Logo, ao substituir 53 nas equações 48, 49 e 50 e igualar a zero de forma conveniente os coeficientes de $P_m^s(\mu)$, obtêm-se um problema de autovalor na frequência adimensional $\omega_{r,n}^{s,\ell}$ e de autovetor nos coeficientes de expansão $A_{r,n,m}^{s,\ell}$, $B_{r,n,m}^{s,\ell}$ e $C_{r,n,m}^{s,\ell}$ com dois casos independentes:

- i) O primeiro consiste em $A_{r,n,m}^{s,\ell}$ e $C_{r,n,m}^{s,\ell}$ para $m = s, s + 2, \dots$, e $B_{r,n,m}^{s,\ell}$ para $m = s + 1, s + 3, \dots$; a altura h_n e a velocidade zonal u_n são simétricas em relação ao Equador (funções pares da latitude) enquanto a velocidade meridional v_n é antissimétrica (função ímpar da latitude); esse caso é chamado de simétrico.
- ii) Para o caso antissimétrico têm-se $A_{r,n,m}^{s,\ell}$ e $C_{r,n,m}^{s,\ell}$ para $m = s + 1, s + 3, \dots$, e $B_{r,n,m}^{s,\ell}$ para $m = s, s + 2, \dots$; a velocidade meridional v_n é simétrica em relação ao Equador e a altura h_n e a velocidade zonal u_n são antissimétricas.

Desse modo para cada número de onda zonal s e um dado truncamento M , há uma matriz para cada um dos casos (simétrico e antissimétrico) bem com $3M$ autovetores (coeficientes de expansão) e $3M$ autovalores (frequência), dos quais $2M$ correspondem aos modos de gravidade inerciais e M modos representando a frequência característica dos modos normais rotacionais.

O resultado da substituição da equação 53 nas equações 48, 49 e 50 e utilizando algumas propriedades das funções de Legendre, obtém-se:

$$\sum_{m=s}^{s+M} \{ [m(m+1)\omega_{r,n}^{s,\ell} + s] A_{r,n,m}^{s,\ell} P_m^s(\mu) + m(m+1) C_{r,n,m}^{s,\ell} P_m^s(\mu) - [(m-1)(m+1) E_m^s P_{m-1}^s(\mu) - m(m+2) E_{m+1}^s P_{m+1}^s(\mu)] B_{r,n,m}^{s,\ell} \} = 0, \quad (54)$$

$$\sum_{m=s}^{s+M} \{ -[m(m+1)\omega_{r,n}^{s,\ell} + s] B_{r,n,m}^{s,\ell} P_m^s(\mu) + [(m-1)(m+1) E_m^s P_{m-1}^s(\mu) + m(m+2) E_{m+1}^s P_{m+1}^s(\mu)] A_{r,n,m}^{s,\ell} \} = 0, \quad (55)$$

e

$$\sum_{m=s}^{s+M} \left[-\omega_{r,n}^{s,\ell} C_{r,n,m}^{s,\ell} P_m^s(\mu) - \frac{m(m+1)}{\epsilon_n} A_{r,n,m}^{s,V} P_m^s(\mu) \right] = 0, \quad (56)$$

onde ϵ_n é o parâmetro de Lamb (veja equação 39 e

$$E_m^s = \left[\frac{(m^2 - s^2)}{(4m^2 - 1)} \right]^{1/2}. \quad (57)$$

E zerando convenientemente os coeficientes de $P_m^s(\mu)$ chega-se a:

$$- [m(m+1)\omega_{r,n}^{s,\ell} + s] A_{r,n,m}^{s,\ell} - m(m+1) C_{r,n,m}^{s,\ell} + (m-1)(m+1) E_m^s B_{r,n,m-1}^{s,\ell} + m(m+2) E_{m+1}^s B_{r,n,m+1}^{s,\ell} = 0, \quad (58)$$

$$- [m(m+1)\omega_{r,n}^{s,\ell} + s] B_{r,n,m}^{s,\ell} + (m-1)(m+1) E_m^s A_{r,n,m-1}^{s,\ell} + m(m+2) E_{m+1}^s A_{r,n,m+1}^{s,\ell} = 0, \quad (59)$$

e

$$\omega_{r,n}^{s,\ell} C_{r,n,m}^{s,\ell} + \frac{m(m+1)}{\epsilon_n} A_{r,n,m}^{s,\ell} = 0. \quad (60)$$

Para o caso em que $s = 0$ as somatórias indicadas nas equações 54, 55 e 56 começam em $m = 0$ ocorrendo a degeneração de alguns modos. Esses modos, denominados geostróficos, são estacionários ($\omega_{r,n}^{s,\ell} = 0$). No entanto, quando se tem $s \geq 1$ ocorrem dois movimentos oscilatórios com frequências distintas: ondas de gravidade inercial (primeiro tipo) que se propagam para leste ($\omega_{r,n}^{s,\ell} > 0$) e para oeste ($\omega_{r,n}^{s,\ell} < 0$) e ondas rotacionais que se propagam para oeste ($\omega_{r,n}^{s,\ell} < 0$).

O caso $s = 0$ é o único em que as frequências dos modos de gravidade aparecem com valores simétricos em relação a zero e os modos rotacionais possuem frequências todas nulas. Ao se fazer $s = 0$ e $\omega_{r,n}^{s,\ell} = 0$ nas equações 48, 49 e 50, estas se reduzem a:

$$(\mu \nabla^2 + D) \psi_n = \nabla^2 h_n , \quad (61)$$

$$D(i \chi_n) = 0 , \quad (62)$$

pois, $\nabla^2(i \chi_n) = \delta = 0$ (veja equações 45, 46 e 52 para $s = 0$ e $\omega_{r,n}^{s,\ell} = 0$), que são as equações geostróficas da vorticidade e da divergência, respectivamente, representando um balanço geostrófico linear para um fluxo zonalmente simétrico sobre a esfera e a condição de vento meridional nulo. Note que pelas equações 45 e 46 para o caso $s = 0$ as derivadas em longitude são nulas e o vento zonal (média zonal) só tem a parte rotacional e o vento meridional (média zonal) só tem a parte divergente, ou seja, os modos geostróficos tem a componente meridional nula. Então, o vento meridional (média zonal) é totalmente devido às ondas de gravidade inerciais.

Substituindo a equação 47 em 61 e 62 obtém-se as seguintes condições para os coeficientes de expansão (Kasahara, 1978):

$$A_{r,n,m \neq 0}^{0,\ell} = 0 , \quad (63)$$

e

$$C_{r,n,m \neq 0}^{0,\ell} \neq 0 . \quad (64)$$

Kasahara (1978) obteve os modos geostróficos ($s = 0$ e $\omega_{r,n}^{s,\ell} = 0$), mas sem uma clara relação com a parte não-zonal. Shigehisa (1983) construiu um conjunto desses modos sobre a esfera, mantendo a consistência energética. Contudo seu método predominantemente gráfico dificulta uma aplicação prática. Bonatti e Silva Dias (1991) propõem uma solução alternativa usando harmônicos esféricos para os modos geostróficos, calculados como um limite analítico quando o número de onda e a frequência tendem a zero. Esse método, descrito a seguir, assegura a consistência energética através dos números de ondas e modos, com uma solução analítica de fácil obtenção.

Considera-se, então, o limite:

$$\gamma_{r,n}^{0,\ell} = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \omega_{r,n}^{s,\ell} \rightarrow 0}} \left(\frac{s}{\omega_{r,n}^{s,\ell}} \right) , \quad (65)$$

onde $\gamma_{r,n}^{0,\ell}$ corresponde aproximadamente à inclinação das curvas de frequência versus número de onda zonal, com $r = 1$ para Rossby e $r = 2$ para Kelvin. O limite $\gamma_{r,n}^{0,\ell-1}$ está relacionado com a velocidade de grupo dos modos geostróficos, uma vez que $\omega_{r,n}^{s,\ell}$ é função de s . Note que ao se usar L'Hôpital para levantar a indeterminação em 65 encontra-se $(\partial \omega_{r,n}^{s,\ell} / \partial s)^{-1}$. Devido a este fato é que para o modo de Kevin $\gamma_{2,n}^{0,\ell}$ é positivo e para os modos de Rossby $\gamma_{1,n}^{0,\ell}$ é negativo, com $\gamma_{r,n}^{0,\ell-1}$ decrescendo monotonicamente. Então, pode-se ordenar os modos geostróficos através do valor de $\gamma_{r,n}^{0,\ell}$.

Os valores do autovalor $\gamma_{r,n}^{0,\ell}$, chamado de “frequência não-dimensional” por Shigehisa (1983) variam com a altura equivalente, com a velocidade não-dimensional da onda de gravidade pura dada por $\epsilon_n^{-1/2}$ e, também com o índice meridional ℓ . O modo de Kelvin é representado por $\ell = -1$ e os demais, modos de Rossby, por $\ell = 1, 2, 3, \dots$. Pode-se mostrar que para o modo de Kelvin, $\gamma_{2,n}^{0,\ell}$ tende para $\epsilon_n^{-1/2}$ se $\epsilon_n \gg 1$ e para zero mais rapidamente que $\epsilon_n^{-1/2}$ se ϵ_n for suficientemente pequeno. Para os modos de Rossby, $\gamma_{1,n}^{0,\ell}$ para valores de ϵ_n muito pequenos tende para seus valores assintóticos correspondentes, e para valores de ϵ_n muito grandes tende para valores assintóticos correspondentes aos modos equatoriais (Shigehisa, 1983)

Utilizando a definição $\gamma_{r,n}^{0,\ell}$ dada na equação 65 e fazendo $m = s$ na equação 60, encontra-se:

$$\epsilon_n C_{r,n,s}^{s,\ell} + (s/\omega_{r,n}^{s,\ell})(s+1)A_{r,n,s}^{s,\ell} = 0 \Rightarrow \epsilon_n C_{r,n,0}^{0,\ell} + \gamma_{r,n}^{0,\ell} A_{r,n,0}^{0,\ell} = 0, \quad (66)$$

onde tanto $A_{r,n,0}^{0,\ell}$ quanto $C_{r,n,0}^{0,\ell}$ devem ser diferentes de zero. Contudo, qualquer outro valor de $A_{r,n,m}^{0,\ell}$ deve ser nulo para os modos geostróficos (equação 63). Como $C_{r,n,m}^{0,\ell}$ precisa ser diferente de zero (equação 64) isto implica que a razão $A_{r,n,m}^{0,\ell}/\omega_{r,n}^{s,\ell}$ deve ser diferente de zero.

Analogamente, fazendo $m = s = 0$ nas equações 58 e 59, as expressões para os modos geostróficos ficam indicadas por:

$$\begin{aligned} & -[s(s+1) + (s/\omega_{r,n}^{s,\ell})]B_{r,n,s}^{s,\ell} + s(s+2)E_{s+1}^s(A_{r,n,s+1}^{s,\ell}/\omega) = 0 \\ \Rightarrow & \gamma_{r,n}^{0,\ell} B_{r,n,0}^{0,\ell} = 0, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & -[s(s+1) + (s/\omega_{r,n}^{s,\ell})]A_{r,n,s}^{s,\ell} - (s/\omega_{r,n}^{s,\ell})(s+1)C_{r,n,s}^{s,\ell} + \\ & (s/\omega_{r,n}^{s,\ell})(s+2)E_{s+1}^s B_{r,n,s+1}^{s,\ell} \Rightarrow \\ & \epsilon_n C_{r,n,0}^{0,\ell} - \gamma_{r,n}^{0,\ell} C_{r,n,0}^{0,\ell} - 2\gamma_{r,n}^{0,\ell} E_1^0 B_{r,n,1}^{0,\ell} = 0, \end{aligned} \quad (68)$$

onde na equação 68 foi usada a equação 66. Considerando $m \geq s+1$ na equação 58 resulta em uma expressão para o coeficiente de expansão $C_{r,n,m}^{0,\ell}$ ($m \geq 1$). dada por:

$$C_{r,n,m}^{0,\ell} = \frac{(m-1)}{m} E_m^0 B_{r,n,m-1}^{0,\ell} + \frac{(m+2)}{(m+1)} E_{m+1}^0 B_{r,n,m+1}^{0,\ell} , \quad (69)$$

Fazendo $m = s + 1$ na equação 59 e combinando com $m = 2$ na equação 69, vem:

$$(-2\epsilon_n E_1^0) C_{r,n,0}^{0,\ell} - [2 + (\epsilon_n/4)(E_2^0)^2] B_{r,n,1}^{0,\ell} - [(2\epsilon_n/3) E_2^0 E_3^0] B_{r,n,3}^{0,\ell} - \gamma_{r,n}^{0,\ell} B_{r,n,1}^{0,\ell} = 0 , \quad (70)$$

Substituindo a equação 70 na equação 68 pode-se escrever $\gamma_{r,n}^{0,\ell} B_{r,n,1}^{0,\ell}$ em função de $\gamma_{r,n}^{0,\ell} C_{r,n,0}^{0,\ell}$ obtendo:

$$[1 - 4\epsilon_n (E_1^0)^2] C_{r,n,0}^{0,\ell} - [4E_1^0 - (\epsilon_n/2) E_1^0 (E_2^0)^2] B_{r,n,1}^{0,\ell} + [(-4\epsilon_n/3) E_1^0 E_2^0 E_3^0] B_{r,n,3}^{0,\ell} - \gamma_{r,n}^{0,\ell} C_{r,n,0}^{0,\ell} = 0 , \quad (71)$$

Fazendo $m \geq 2$ na equação 60, com s e $\omega_{r,n}^{s,\ell}$ tendendo a zero, resulta:

$$\left(\frac{A_{r,n,m}^{0,\ell}}{\omega_{r,n}^{s,\ell} \rightarrow 0} \right) = - \frac{\epsilon_n}{m(m+1)} C_{r,n,m}^{0,\ell} , \quad (72)$$

Analogamente, para $m \geq 2$ na equação 59 e utilizando as equações 69 e 72, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[- \frac{(m-2)(m+1)}{(m-1)m} \epsilon_n E_{m-1}^0 E_m^0 \right] B_{r,n,m-2}^{0,\ell} + \\ & \left[\frac{(m+1)^2}{m^2} \epsilon_n (E_m^0)^2 - \frac{m^2}{(m+1)^2} \epsilon_n (E_{m+1}^0)^2 - m(m+1) \right] B_{r,n,m}^{0,\ell} + \\ & \left[- \frac{m(m+3)}{(m+1)(m+2)} \epsilon_n E_{m+1}^0 E_{m+2}^0 \right] B_{r,n,m+2}^{0,\ell} - \gamma_{r,n}^{0,\ell} B_{r,n,m}^{0,\ell} = 0 . \end{aligned} \quad (73)$$

A equações 70, 71 e 72 formam um problema de autovalor ($\gamma_{r,n}^{0,\ell}$) e autovetor ($C_{r,n,0}^{0,\ell}$ e $B_{r,n,m}^{0,\ell}$). Note que $C_{r,n,0}^{0,\ell}$ é obtido como parte do autovetor e $C_{r,n,m \geq 1}^{0,\ell}$ é obtido pela equação 69. Esse coeficiente extra no autovetor proporciona a obtenção do modo geostrófico de Kelvin. A partir dessas equações pode-se obter os casos simétrico e antissimétrico, para os coeficientes de expansão como autovetores e $\gamma_{r,n}^{0,\ell}$ como autovalor, em função dos valores de m . Logo, para os modos geostróficos, segue-se que:

i) Caso Simétrico:

- Para m ímpar nas equações 71, 70 e 73 obtém-se os coeficientes de expansão $C_{r,n,0}^{0,\ell}$ e $B_{r,n,2m-1}^{0,\ell}$, com $m = 1, 2, 3, \dots$;
- Para m par na equação 69 obtém-se o coeficiente de expansão $C_{r,n,2m}^{0,\ell}$ com $m = 1, 2, 3, \dots$
- Pela equação 66 obtém-se $A_{r,n,0}^{0,\ell}$ e pela equação 63 tem-se $A_{r,n,m \neq 0}^{0,\ell} = 0$.

ii) Caso Antissimétrico:

- a) Para m par na equação 67, encontra-se $B_{r,n,0}^{0,\ell} = 0$ e pela equação 73 obtém-se $B_{r,n,2m}^{0,\ell}$ com $m = 1, 2, 3, \dots$;
- b) Para m ímpar nas equação 69, obtém-se o coeficiente de expansão $C_{r,n,2m-1}^{0,\ell}$ com $m = 1, 2, 3, \dots$;
- c) Pela equação 63 tem-se $A_{r,n,m \neq 0}^{0,\ell} = 0$.

Note que $C_{r,n,0}^{0,\ell}$ representa um valor global constante para a altura h_n , simbolizando um valor mínimo de energia potencial não disponível. Por outro lado, $A_{r,n,0}^{0,\ell}$ apesar de também representar um valor global constante para o potencial de velocidade, não é utilizado em nenhum cálculo, dado que apenas a derivada de χ é usada na representação do vento.

Até agora discutiu-se o caso degenerado com número de onda zonal nulo e frequência nula constituindo os modos geostróficos, mas há o caso de número de onda zonal nulo e a frequência não-nula, que são modos de gravidade inercial zonais com frequências simétricas em relação ao zero, como será mostrado a seguir. Nesse caso os coeficientes de expansão ficam explicitados fazendo $s = 0$ nas equações 58, 59 e 60, como:

$$- [m(m+1)\omega_{r,n}^{s,\ell}] A_{r,n,m}^{0,\ell} - m(m+1) C_{r,n,m}^{0,\ell} + (m-1)(m+1) E_m^0 B_{r,n,m-1}^{0,\ell} + m(m+2) E_{m+1}^0 B_{r,n,m+1}^{0,\ell} = 0, \quad (74)$$

$$- [m(m+1)\omega_{r,n}^{s,\ell}] B_{r,n,m}^{0,\ell} + (m-1)(m+1) E_m^0 A_{r,n,m-1}^{0,\ell} + m(m+2) E_{m+1}^0 A_{r,n,m+1}^{0,\ell} = 0, \quad (75)$$

e

$$\omega_{r,n}^{s,\ell} C_{r,n,m}^{0,\ell} + \frac{m(m+1)}{\epsilon_n} A_{r,n,m}^{0,\ell} = 0 \Rightarrow A_{r,n,m}^{0,\ell} = -\frac{\omega_{r,n}^{s,\ell} \epsilon_n}{m(m+1)} C_{r,n,m}^{0,\ell}. \quad (76)$$

Considerando $m = 0$ nas equações 74, 75 e 76 conclui-se que $A_{r,n,0}^{0,\ell}$ e $B_{r,n,0}^{0,\ell}$ podem assumir qualquer valor e o mesmo acontece com $C_{r,n,0}^{0,\ell}$. Sem perda de generalidade, pode-se considerá-los nulos, então:

$$A_{r,n,0}^{0,\ell} = B_{r,n,0}^{0,\ell} = C_{r,n,0}^{0,\ell} = 0, \quad (77)$$

para os modos de gravidade inercial zonais.

Eliminando $A_{r,n,m}^{0,\ell}$ na equação 75 usando a equação 76 encontra-se uma relação entre $B_{r,n,m}^{0,\ell}$ e $C_{r,n,m}^{0,\ell}$ tal que:

$$B_{r,n,m}^{0,\ell} = -\frac{\epsilon_n E_m^0}{m^2} C_{r,n,m-1}^{0,\ell} - \frac{\epsilon_n E_{m+1}^0}{(m+1)^2} C_{r,n,m+1}^{0,\ell}, \quad (78)$$

Finalmente, introduzindo as equações 76 e 78 na equação 74 chega-se a uma equação para o coeficiente de expansão $C_{r,n,m}^{0,\ell}$ para $m \geq 1$ dada por:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(m+1)}{(m-1)} E_{m-1}^0 E_m^0 \right] C_{r,n,m-2}^{0,\ell} + \\
& \left[\frac{m(m+1)}{\epsilon_n} + \frac{(m-1)(m+1)}{m^2} (E_m^0)^2 + \frac{m(m+2)}{(m+1)^2} (E_{m+1}^0)^2 \right] C_{r,n,m}^{0,\ell} \\
& \left[\frac{m}{(m+2)} E_{m+1}^0 E_{m+2}^0 \right] C_{r,n,m+2}^{0,\ell} - (\omega_{r,n}^{s,\ell})^2 C_{r,n,m}^{0,\ell}.
\end{aligned} \tag{79}$$

A equação 79 tem como autovalor $(\omega_{r,n}^{s,\ell})^2$, o que implica que a frequência $\omega_{r,n}^{s,\ell}$ tem valores simétricos em relação a zero. Desta forma, considerando as equações 76, 77, 78 e 79 pode-se escrever os casos simétrico e antissimétrico quando $s = 0$ e $\omega_{r,n}^{s,\ell} \neq 0$ em função dos valores de m da seguinte maneira:

i) Caso Simétrico:

- a) Para m par na equação 79 obtém-se $C_{r,n,2m}^{0,\ell}$ e pela equação 76 calcula-se $A_{r,n,2m}^{0,\ell}$ para $m = 1, 2, 3, \dots$ enquanto $C_{r,n,0}^{0,\ell}$ e $A_{r,n,0}^{0,\ell}$ são nulos pela equação 77;
- b) Para m ímpar na equação 78 obtém-se $B_{r,n,2m-1}^{0,\ell}$ para $m = 1, 2, 3, \dots$.

ii) Caso Antissimétrico:

- a) Para m ímpar na equação 79 obtém-se $C_{r,n,2m-1}^{0,\ell}$ e pela equação 76 calcula-se $A_{r,n,2m-1}^{0,\ell}$ para $m = 1, 2, 3, \dots$;
- b) Para m par na equação 78 obtém-se $B_{r,n,2m}^{0,\ell}$ para $m = 1, 2, 3, \dots$ enquanto $B_{r,n,0}^{0,\ell}$ é nulo pela equação 77.

Finalmente, para o caso em que $s > 0$ e $\omega_{r,n}^{s,\ell} \neq 0$ as equações 58, 59 e 60 podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{-s}{m(m+1)} \right] A_{r,n,m}^{s,\ell} - C_{r,n,m}^{s,\ell} + \left[\frac{(m-1)}{m} E_m^s \right] B_{r,n,m-1}^{s,\ell} + \\
& \left[\frac{(m+2)}{(m+1)} E_{m+1}^s \right] B_{r,n,m+1}^{s,\ell} - \omega_{r,n}^{s,\ell} A_{r,n,m}^{s,\ell} = 0,
\end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{-s}{m(m+1)} \right] B_{r,n,m}^{s,\ell} + \left[\frac{(m-1)}{m} E_m^s \right] A_{r,n,m-1}^{s,\ell} + \left[\frac{(m+2)}{(m+1)} E_{m+1}^s \right] A_{r,n,m+1}^{s,\ell} + \\
& -\omega_{r,n}^{s,\ell} B_{r,n,m}^{s,\ell} = 0
\end{aligned} \tag{81}$$

e

$$\left[\frac{-m(m+1)}{\epsilon_n} \right] A_{r,n,m}^{s,\ell} - \omega_{r,n}^{s,\ell} C_{r,n,m}^{s,\ell} = 0. \tag{82}$$

Com base nas equações 80, 81 e 82 e nos valores que m pode assumir, os coeficientes das funções de Hough (autovetores) associados com as frequências não-nulas (autovalores) pode-se estabelecer os seguintes casos:

i) Caso Simétrico:

- a) Índice par na equação 80 tal que o coeficiente de expansão seja da forma $A_{r,n,2m}^{s,\ell}$ com $m = s, s + 1, s + 2, \dots$;
- b) Índice impar na equação 81 tal que o coeficiente de expansão seja da forma $B_{r,n,2m-1}^{s,\ell}$ com $m = s, s + 1, s + 2, \dots$;
- c) Índice par na equação 82 tal que o coeficiente de expansão seja da forma $C_{r,n,2m}^{s,\ell}$ com $m = s, s + 1, s + 2, \dots$.

ii) Caso Antissimétrico:

- a) Índice impar na equação 80 tal que o coeficiente de expansão seja da forma $A_{r,n,2m-1}^{s,\ell}$ com $m = s, s + 1, s + 2, \dots$;
- b) Índice par na equação 81 tal que o coeficiente de expansão seja da forma $B_{r,n,2m}^{s,\ell}$ com $m = s, s + 1, s + 2, \dots$;
- c) Índice impar na equação 82 tal que o coeficiente de expansão seja da forma $C_{r,n,2m-1}^{s,\ell}$ com $m = s, s + 1, s + 2, \dots$.

As ondas de Kelvin e Mista Rossby-gravidade estão devidamente incluídas nos casos anteriores e correspondem ao primeiro modo de gravidade simétrico e ao primeiro modo de Rossby antissimétrico, respectivamente. A exceção é para o caso $s = 0$ e $\omega = 0$, onde a onda de Kelvin é o primeiro modo geostrófico e não aparece entre as ondas de gravidade inercial zonais.

Para determinar as componentes da velocidade horizontal (veja equações 43, 45 e 46) em função dos coeficientes de expansão $A_{r,n,m}^{s,\ell}$ e $B_{r,n,m}^{s,\ell}$, basta expressá-las em termos da função de corrente ($\psi_{r,n}^{s,\ell}$) e do potencial de velocidade ($\chi_{r,n}^{s,\ell}$). Desse modo tem-se:

$$U_{r,n}^{s,\ell} = [s (i \chi_n^{s,\ell}) - D\psi_{r,n}^{s,\ell}] / [\epsilon_n (1 - \mu^2)]^{1/2}, \quad (83)$$

$$V_{r,n}^{s,\ell} = [-s\psi_{r,n}^{s,\ell} + D(i \chi_{r,n}^{s,\ell})] / [\epsilon_n (1 - \mu^2)]^{1/2}, \quad (84)$$

Substituindo a expansão dada na equação 47 nas equações 83 e 84 e usando propriedades das funções associadas de Legendre, as expressões para os campos de vento, em termos dos coeficientes de expansão, tornam-se:

$$U_{r,n}^{s,\ell}(\mu) = [\epsilon_n (1 - \mu^2)]^{-1/2} \sum_{m=s}^{s+M} \{ [-s A_{r,n,m}^{s,\ell}] P_m^s(\mu) - [(m+1) E_m^s B_{r,n,m}^{s,\ell}] P_{m-1}^s(\mu) + [m E_{m+1}^s B_{r,n,m}^{s,n}] P_{m+1}^s(\mu) \}, \quad (85)$$

$$V_{r,n}^{s,\ell}(\mu) = [\epsilon_n (1 - \mu^2)]^{-1/2} \sum_{m=s}^{s+M} \{ [-s B_{r,n,m}^{s,\ell}] P_m^s(\mu) - [(m+1) E_m^s A_{r,n,m}^{s,\ell}] P_{m-1}^s(\mu) + [m E_{m+1}^s A_{r,n,m}^{s,\ell}] P_{m+1}^s(\mu) \}. \quad (86)$$

Substituindo a equação 43 na equação 44 da condição de ortonormalidade das funções de Hough, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \boldsymbol{\theta}_{r,n}^{s,\ell}(\mu) \left[\boldsymbol{\theta}_{r',n}^{s,\ell'}(\mu) \right]^* d\mu = \\ \int_{-1}^1 \left(U_{r,n}^{s,\ell} U_{r',n}^{s,\ell'} + V_{r,n}^{s,\ell} V_{r',n}^{s,\ell'} + Z_{r,n}^{s,\ell} Z_{r',n}^{s,\ell'} \right) d\mu = \kappa \delta_{\ell,\ell'} \delta_{r,r'} . \end{aligned} \quad (87)$$

A constante κ surge, pois se considera que as funções de Hough não estão normalizadas ainda. Expressando em termos dos coeficientes de expansão será feito por partes. Primeiro para a altura:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 Z_{r,n}^{s,\ell} Z_{r',n}^{s,\ell'} d\mu = \sum_{m=s}^{s+2M+1} \sum_{j=s}^{s+M} C_{r,n,m}^{s,\ell} C_{r',n,j}^{s,\ell'} \int_{-1}^1 P_m^s(\mu) P_j^s(\mu) d\mu = \\ \sum_{m=s}^{s+M} C_{r,n,m}^{s,\ell} C_{r',n,m}^{s,\ell'} . \end{aligned} \quad (88)$$

Agora para o vento:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(U_{r,n}^{s,\ell} U_{r',n}^{s,\ell'} + V_{r,n}^{s,\ell} V_{r',n}^{s,\ell'} \right) d\mu = \\ \sum_{m=s}^{s+M} \frac{m(m+1)}{\epsilon_n} \left(A_{r,n,m}^{s,\ell} A_{r',n,m}^{s,\ell'} + B_{r,n,m}^{s,\ell} B_{r',n,m}^{s,\ell'} \right) , \end{aligned} \quad (89)$$

Então, a condição de ortonormalidade pode ser expressa em termos dos coeficientes de expansão como:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(U_{r,n}^{s,\ell} U_{r',n}^{s,\ell'} + V_{r,n}^{s,\ell} V_{r',n}^{s,\ell'} + Z_{r,n}^{s,\ell} Z_{r',n}^{s,\ell'} \right) d\mu = \\ \sum_{m=s}^{s+M} \left[\frac{m(m+1)}{\epsilon_n} \left(A_{r,n,m}^{s,\ell} A_{r',n,m}^{s,\ell'} + B_{r,n,m}^{s,\ell} B_{r',n,m}^{s,\ell'} \right) + C_{r,n,m}^{s,\ell} C_{r',n,m}^{s,\ell'} \right] = \\ K \delta_{\ell,\ell'} \delta_{r,r'} . \end{aligned} \quad (90)$$

E considerando os índices $r = r'$ e $\ell = \ell'$ encontra-se o dobro da energia total do modo:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[\left(U_{r,n}^{s,\ell} \right)^2 + \left(V_{r,n}^{s,\ell} \right)^2 + \left(Z_{r,n}^{s,\ell} \right)^2 \right] d\mu = \\ \sum_{m=s}^{s+M} \left\{ \left[\frac{m(m+1)}{\epsilon_n} \left(A_{r,n,m}^{s,\ell} \right)^2 + \left(B_{r,n,m}^{s,\ell} \right)^2 \right] + \left(C_{r,n,m}^{s,\ell} \right)^2 \right\} = \kappa , \end{aligned} \quad (91)$$

Para se efetuar a normalização das autofunções, resolve-se primeiro o problema de autovalor ($\omega_{r,n}^{s,\ell}$) e autovetor ($[A_{r,n,m}^{s,\ell} , B_{r,n,m}^{s,\ell} , C_{r,n,m}^{s,\ell}]^T$). A seguir, calcula-se κ através da somatória da equação 91 e divide-se os coeficientes $A_{r,n,m}^{s,\ell}$, $B_{r,n,m}^{s,\ell}$ e $C_{r,n,m}^{s,\ell}$ pela raiz quadrada de κ . Desse modo a integral da equação 91 fica igual a 1, ou seja, a energia total fica $\frac{1}{2}$. É feito um teste através de quadratura de Gauss da integral da equação 91, após o cálculo de $U_{r,n}^{s,\ell}$, $V_{r,n}^{s,\ell}$ e $Z_{r,n}^{s,\ell}$ pelas equações 85, 86 e 53, respectivamente. Nesse procedimento tolera-se de 10^{-9} em 1. Também pode-se fazer o teste de ortogonalidade usando a equação 90 após fazer a normalização ($\kappa = 1$).

Como a equação 91 representa o dobro da energia total de cada modo, pode-se definir a energia cinética zonal ($ECZ_{r,n}^{s,\ell}$), a energia cinética meridional ($ECM_{r,n}^{s,\ell}$) e a energia potencial disponível ($EPD_{r,n}^{s,\ell}$) como:

$$ECZ_{r,n}^{s,\ell} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (U_{r,n}^{s,\ell})^2 d\mu = \frac{1}{2} \sum_{m=s}^{s+M} \left[\frac{m(m+1)}{\epsilon_n} (A_{r,n,m}^{s,\ell})^2 \right], \quad (92)$$

$$ECM_{r,n}^{s,\ell} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (V_{r,n}^{s,\ell})^2 d\mu = \frac{1}{2} \sum_{m=s}^{s+M} \left[\frac{m(m+1)}{\epsilon_n} (B_{r,n,m}^{s,\ell})^2 \right], \quad (93)$$

$$EPD_{r,n}^{s,\ell} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (Z_{r,n}^{s,\ell})^2 d\mu = \frac{1}{2} \sum_{m=s}^{s+M} \left[(C_{r,n,m}^{s,\ell})^2 \right], \quad (94)$$

Decomposição de Dados (Vertical_Decomposition and Horizontal_Decomposition)

A decomposição de dados tridimensionais em níveis de pressão será discutida a seguir. Os dados de entrada para um dado tempo fixado e níveis de pressão k são representados por:

$$\mathbf{A}_k(\lambda, \varphi, t) = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ h_k \end{bmatrix}(\lambda, \varphi, t) = \begin{bmatrix} u_{k \text{ obs}} \\ v_{k \text{ obs}} \\ Z_{k \text{ obs}} - \tilde{Z}_k \end{bmatrix}(\lambda, \varphi, t), \quad (95)$$

onde λ é a longitude φ é a latitude e obs representa observações, análises ou previsões.

A projeção do vetor de dados $\mathbf{A}_k(\lambda, \varphi, t)$ sobre as funções da estrutura vertical $\Phi_{n,k}$, definidas em 27, é dada por

$$\mathbf{A}_k(\lambda, \varphi, t) = \sum_{k=1}^K \underline{\mathbf{S}}_n \mathbf{A}_n(\lambda, \varphi, t) \Phi_{n,k}, \quad (96a)$$

ou

$$\mathbf{A}_n(\lambda, \varphi, t) = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ h_n \end{bmatrix}(\lambda, \varphi, t) = \sum_{k=1}^K \underline{\mathbf{S}}_n^{-1} \mathbf{A}_k(\lambda, \varphi, t) \Phi_{n,k}, \quad (96b)$$

onde $\underline{\mathbf{S}}_n$ é a matriz de adimensionalização.

O vetor de coeficientes horizontais $\mathbf{A}_n(\lambda, \varphi, t)$ para um dado modo vertical n é, então, projetado sobre as harmônicos horizontais de Hough $\mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell}(\lambda, \varphi)$ (veja definição em Bonatti, 2020) como

$$\mathbf{A}_n(\lambda, \varphi, t) = \sum_{r,s,\ell} C_{r,n}^{s,\ell}(t) \mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell}(\lambda, \varphi), \quad (97)$$

onde s é o número de onda zonal, ℓ é o índice meridional do modo horizontal e r representa o tipo de onda horizontal. O coeficiente escalar $C_{r,n}^{s,\ell}(t)$ é obtido multiplicando-se a equação 97 por $[\mathcal{H}_{r',n}^{s',\ell'}]^*$ e integrando no domínio horizontal, tal que

$$C_{r,n}^{s,\ell}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mathbf{A}_n(\lambda, \mu, t) \cdot [\mathcal{H}_{r,n}^{s,\ell}]^* d\mu d\lambda, \quad (98)$$

lembrando que $\mu = \sin \varphi$. Então, a integral da equação 95 pode ser dividida em duas partes:

$$\mathbf{A}_{n,s}(\mu, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_n(\lambda, \mu, t) \exp(is\lambda) d\lambda. \quad (99)$$

e

$$C_{r,n}^{s,\ell}(t) = \int_{-1}^1 \mathbf{A}_{n,s}(\mu, t) \cdot [\boldsymbol{\Theta}_{r,n}^{s,\ell}]^* d\mu, \quad (100)$$

A equação 99 é a transformada de Fourier e usa-se um procedimento de transformada rápida de Fourier para fazer a integral. A equação 100 é a transformada de Hough e a integral é feita usando quadratura de Gauss. Primeiro faz-se a decomposição vertical pela equação 96b, depois calcula-se a transformada de Fourier (equação 99) e depois o coeficiente escalar de desenvolvimento pela equação 100. Além disso, pode-se mostrar que o módulo do coeficiente escalar ao quadrado $(|C_{r,n}^{s,\ell}(t)|^2)$ é proporcional à energia total e baseado nisso pode-se analisar a energia total de cada modo individualmente, para cada n , s , ℓ , e r .

Para a aplicação dessas transformadas na equação 34, reescreve-se a equação 97 usando a equação 43 a estrutura vertical dos campos fica:

$$\mathbf{A}_n(\lambda, \varphi, t) = \sum_{r,s,\ell} C_{r,n}^{s,\ell}(t) \boldsymbol{\Theta}_{r,n}^{s,\ell}(\varphi) \exp(is\lambda), \quad (101)$$

a estrutura vertical dos termos não-lineares segue a mesma formulação:

$$\mathbf{N}_n(\lambda, \varphi, t) = \sum_{r,s,\ell} \eta_{r,n}^{s,\ell}(t) \boldsymbol{\Theta}_{r,n}^{s,\ell}(\varphi) \exp(is\lambda) \quad (102)$$

e a estrutura vertical dos termos forçantes fica:

$$\mathbf{F}_n(\lambda, \varphi, t) = \sum_{r,s,\ell} f_{r,n}^{s,\ell}(t) \boldsymbol{\Theta}_{r,n}^{s,\ell}(\varphi) \exp(is\lambda), \quad (103)$$

onde os coeficientes $\eta_{r,n}^{s,\ell}(t)$ e $f_{r,n}^{s,\ell}(t)$ seguem uma definição análoga à do coeficiente $C_{r,n}^{s,\ell}(t)$.

Então, usando as equações 101, 102 e 103 na equação 34, multiplicando pelo complexo conjugado do harmônico de Hough e integrando no domínio $(0 \leq \lambda \leq 2\pi$ e $-1 \leq \mu \leq 1)$, chega-se a:

$$\frac{d}{dt} C_{r,n}^{s,\ell}(t) + i \omega_{r,n}^{s,\ell} C_{r,n}^{s,\ell}(t) = \eta_{r,n}^{s,\ell}(t) + f_{r,n}^{s,\ell}(t), \quad (104)$$

onde o sistema original de equações diferenciais parciais da estrutura horizontal (13, 14 e 16) foi transformado em um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias, o qual governa a evolução temporal dos coeficientes de expansão e tem a forma de um oscilador harmônico forçado e acoplado (Silva Dias e Schubert, 1979). Assim, a equação 104 governa a variação temporal dos coeficientes de expansão $C_{r,n}^{s,\ell}(t)$ relativos à variável de estado $\mathbf{A}_n(\lambda, \varphi, t)$ com uma solução numérica não-elementar, já que os coeficientes do membro direito da equação 104

acoplam todos os modos (zonais, meridionais, gravitacionais e rotacionais) para cada modo vertical n , pois o termo não-linear $\eta_{r,n}^{s,\ell}(t)$ é função de todos os coeficientes $C_{r,n}^{s,\ell}(t)$.

O segundo termo de 104 representa a solução linear, correspondendo à previsão de tempo. O coeficiente $f_{r,n}^{s,\ell}(t)$ corresponde ao termo forçante, ou seja, dissipação por atrito, resfriamento e fonte de calor (aquecimento diabático), correspondendo à previsão climática. O coeficiente $\eta_{r,n}^{s,\ell}(t)$ contém informação sobre os termos não-lineares do sistema original (advecção, termos métricos), representando os acoplamentos e as interações entre as escalas espaciais e temporais. Uma vez que esses coeficientes são obtidos, a solução tridimensional para os campos de vento zonal, vento meridional e altura geopotencial, indicados matricialmente como $A(\lambda, \varphi, p, t)$, fica expressa por:

$$A(\lambda, \varphi, p, t) = \sum_n \underline{S}_n \sum_{s,\ell,n} C_{r,n}^{s,\ell}(t) \Theta_{r,n}^{s,\ell}(\varphi) \exp(is\lambda) \Phi_n(p), \quad (105)$$

onde $\underline{S}_n$ é a matriz de adimensionalização definida na equação 32 e $\Phi_n(p)$ são os autovetores da estrutura horizontal (equações 28 e 29).

O cálculo dos coeficientes de expansão em modos normais para os termos não-linear e forçante é feito pelo método da transformada numérica (Eliassen et al, 1970, Orszag, 1970). Assim, as funções $N_n(\lambda, \varphi, t)$ e $F_n(\lambda, \varphi, t)$ são representadas em uma grade horizontal tal que as integrais equivalentes a esses termos nas equações 99 e 100 possam ser calculadas precisamente através de quadratura gaussiana e por transformada rápida de Fourier, respectivamente. A grade horizontal é regular em longitude e gaussiana em latitude. Então, a resolução em que se realiza os cálculos corresponde ao truncamento escolhido, nesse caso, truncamento romboidal M . O número de pontos zonais I é dado por $I \geq 3M + 1$. Como se usa transformada rápida de Fourier, I tem que ser da forma $I_F = 2^x 3^y 5^z$, com $x = 1, 2, 3, \dots$; $y = 0, 1, 2, \dots$; $z = 0, 1, 2, \dots$. Então, I deve ser igual ao I_F logo acima de $3M + 1$. No truncamento romboidal o número de pontos meridionais J corresponde a $J \geq 5I/6$. Devido a lógica do cálculo da quadratura gaussiana implementado, J deve ser par e $J/2$ também. Logo, para um truncamento romboidal na onda zonal 125 (RB0125), tem-se: $M = 125$, $I = 384$ e $J = 320$.

A solução completa da equação (16) exige uma condição inicial, fornecida pelos coeficientes de expansão das variáveis em $t = 0$, para todos os modos horizontais s, ℓ, r associados com cada modo vertical n . Uma condição inicial arbitrária pode projetar-se sobre todos os modos, fazendo com que a evolução futura da solução dependa da partição de energia inicial. Como a magnitude da velocidade de grupo das ondas de gravidade é bem maior que a dos modos rotacionais, uma configuração inicial que, por exemplo, tenha sua energia concentrada nas ondas rotacionais, apresentará uma escala de tempo característica da dispersão lenta (Bonatti e Silva Dias, 1983).

No caso linear e sem forçante $\eta_{r,n}^{s,\ell}(t) = f_{r,n}^{s,\ell}(t) = 0$ na equação 104, o caráter dispersivo das ondas não altera a distribuição inicial de energia. No entanto, no caso não-linear pode ocorrer transferência de energia dos modos rotacionais para as ondas de gravidade, mesmo que não haja componente gravitacional na condição inicial. Assim, um esquema de inicialização pode ser utilizado para manter a condição inicial o mais próximo possível da informação observacional, mas também deve suprimir o surgimento de ondas de gravidade de alta frequência (que são ruídos ou espúrias).

A equação 104 pode ser utilizada para um procedimento de inicialização por modos normais o qual utiliza a expansão das variáveis em modos normais e separa as oscilações livres em modos rápidos e lentos, de acordo com sua frequência. Essa inicialização pode ser linear ou não-linear e adiabática ou diabática. Maiores detalhes são dados em Bonatti e Silva Dias (1983) e Daley (1991).

Análise Energética

A seguir será mostrado como se faz a análise da partição modal de energia e das interações entre modos. A análise da partição de energia total é realizada entre os modos verticais e entre os modos horizontais: Rossby, Kelvin, misto Rossby-gravidade, gravidade leste e oeste. As partes vertical e horizontal desta análise são baseadas na documentação NMC Development Division Staff (1988) e Andrade (1994), respectivamente, e também em Borges Mendonça (2005). Kasahara e Puri (1981) mostraram que a partição de energia entre os modos verticais pode ser tratada individualmente para cada modo vertical. Integrando globalmente a equação modificada da termodinâmica, em coordenada vertical σ , no processo de separação de variáveis, em longitude λ , em latitude φ ($\mu = \sin \varphi$) e em coordenada vertical σ , e usando a condição de ortonormalidade da estrutura vertical, obtém-se, na ausência de fontes e sumidouros que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_n \frac{1}{2} \left(\hat{u}_n^2 + \hat{v}_n^2 + \frac{g}{H_n} \hat{h}_n^2 \right) a^2 d\lambda d\mu = 0. \quad (106)$$

Isto demonstra que a representação dada nas equações 107, 108 e 109 a seguir em termos da soma sobre os n modos verticais permite a partição da energia total em energia cinética e energia potencial disponível para cada modo vertical separadamente.

Os cálculos da energia cinética (E_{C_n}), da energia potencial disponível (E_{P_n}) e da energia total (E_{T_n}), associados a cada modo vertical n , são obtidos, na forma adimensional, a partir das seguintes equações (veja equações 35 e 42):

$$E_{C_n} = \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2), \quad (107)$$

$$E_{P_n} = \frac{1}{2} (h_n^2), \quad (108)$$

$$E_{T_n} = E_{C_n} + E_{P_n}. \quad (109)$$

A contribuição em porcentagem para a energia total de cada modo vertical é obtida pela expressão:

$$P_n = \frac{E_{C_n} + E_{P_n}}{\sum_{n=0}^N (E_{C_n} + E_{P_n})} \times 100\%, \quad (110)$$

onde N é o número total de modos verticais considerados que é igual, no máximo, ao número de camadas K .

A seguir são apresentadas as equações da partição de energia entre os modos verticais e horizontais. Para os modos verticais considera-se, em geral, que uma função estrutura vertical

Ψ_{nk} e o autovetor da adjunta Ψ_{nk}^T , para os modos $n = 1, \dots, K$ e níveis $k = 1, \dots, K$, satisfaça a seguinte relação de ortonormalidade:

$$\sum_{k=1}^K \Psi_{nk} \Psi_{mk}^T \gamma_m = \delta_{nm}, \quad (111)$$

onde $\gamma_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^K \Psi_{nk} \Psi_{nk}^T}$ e δ_{nm} é o delta de Kronocker. No cálculo dos modos verticais em coordenadas de pressão mostrado anteriormente as autofunções são ortogonais, de forma que $\Phi_{nk} = \Psi_{nk} = \Psi_{nk}^T$ e $\gamma_n = 1$.

A energia cinética para cada nível k pode ser definida, então, da seguinte forma:

$$E_{C_k} = \frac{1}{2} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{W}_k^T, \quad (112)$$

com: $\mathbf{W}_k = \sum_{n=1}^K \mathbf{W}_n \Psi_{nk}$ e $\mathbf{W}_k^T = \sum_{m=1}^K \mathbf{W}_m \Psi_{mk}^T \gamma_m$,

onde: $\mathbf{W}_n = \hat{u}_n \hat{\mathbf{i}} + \hat{v}_n \hat{\mathbf{j}}$; $\hat{u}_n = \sqrt{gH_n} u_n$; e $\hat{v}_n = \sqrt{gH_n} v_n$.

As variáveis u_n e v_n são as componentes zonal e meridional do vento adimensionalizadas. De acordo com as definições acima, a equação 38 pode ser rescrita como:

$$E_{C_k} = \frac{1}{2} [\sum_{n=1}^K (\hat{u}_n \hat{\mathbf{i}} + \hat{v}_n \hat{\mathbf{j}}) \Psi_{nk}] \cdot [\sum_{m=1}^K (\hat{u}_m \hat{\mathbf{i}} + \hat{v}_m \hat{\mathbf{j}}) \Psi_{mk}^T \gamma_m], \quad (113)$$

ou seja,

$$E_{C_k} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K \sum_{m=1}^K g \sqrt{H_n H_m} (u_n u_m + v_n v_m) \Psi_n \Psi_{mk}^T \gamma_m, \quad (114)$$

A equação 45 acima pode ser decomposta em duas parcelas, uma contendo os termos para o caso em que $n = m$ e outra para os termos em que $n \neq m$:

$$E_{C_k} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K g H_n (u_n^2 + v_n^2) \Psi_{nk} \Psi_{nk}^T \gamma_n + \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{m=n+1}^K g \sqrt{H_n H_m} (u_n u_m + v_n v_m) \Psi_{nk} \Psi_{mk}^T \gamma_m. \quad (115)$$

A equação 115 é a equação da energia cinética dos modos verticais para cada nível k , composta pela soma da energia cinética de todos os modos verticais n (primeiro termo da direita) e pela soma da energia cinética devido às interações entre os diferentes modos verticais (segundo termo da direita). Essa é uma forma simples e clara de se estudar a interação de energia entre modos verticais. Uma outra forma é a análise dos coeficientes de interação expandindo os termos não-lineares das equações primitivas. Os coeficientes de expansão associados a esses termos dão as interações entre os modos verticais. Andrade (1994) faz essa análise calculando os modos verticais e esses coeficientes de forma analítica, em um modelo de equações primitivas com coordenadas horizontais esféricas e vertical sigma. No Apêndice A é apresentado um resumo desse cálculo e uma forma de se definir quantos níveis verticais são necessários para representar bem esses coeficientes e, portanto, a interação de energia entre os modos verticais.

Aplicando-se o somatório em k à equação 115, tem-se que a condição de ortonormalidade 111 é satisfeita e o segundo membro de 115 é nulo, obtendo-se a equação da energia cinética integrada verticalmente para todos os níveis k ($E_C = \sum_{k=1}^K E_{C_k}$):

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K g H_n (u_n^2 + v_n^2) = \sum_{n=1}^K E_{C_n}, \quad (116)$$

Analogamente, tem-se que a energia potencial disponível para cada nível k é definida como:

$$E_{P_k} = \frac{1}{2} Z_k Z_k^T, \quad (117)$$

$$\text{com: } Z_k = \sum_{n=1}^K \frac{g \hat{h}_n}{\sqrt{g H_n}} \Psi_{nk} \quad \text{e} \quad Z_k^T = \sum_{m=1}^K \frac{g \hat{h}_m}{\sqrt{g H_m}} \Psi_{mk}^T \gamma_m, \quad (118)$$

onde: $\hat{h}_n = H_n h_n$ (h_n é altura geopotencial adimensionalizada) e Z_k e Z_k^T definidos em coerência com as equações 106 e 111. Substituindo 118 em 117, obtém-se:

$$E_{P_k} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^K \frac{g H_n h_n}{\sqrt{g H_n}} \Psi_{nk} \right) \left(\sum_{m=1}^K \frac{g H_m h_m}{\sqrt{g H_m}} \Psi_{mk}^T \gamma_m \right), \quad (119)$$

ou

$$E_{P_k} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K \sum_{m=1}^K (g \sqrt{H_n H_m} h_n h_m \Psi_{nk} \Psi_{mk}^T \gamma_m), \quad (120)$$

A equação 120 pode, então, ser decomposta na soma de dois termos, um contendo a soma da energia potencial disponível para todos os modos n e outro contendo a soma da energia potencial disponível devido à interação entre os diferentes modos verticais. Assim,

$$E_{P_k} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K (g H_n h_n^2) \Psi_{nk} \Psi_{nk}^T \gamma_n + \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{m=n+1}^K (g \sqrt{H_n H_m} h_n h_m) \Psi_{mk} \Psi_{mk}^T \gamma_m, \quad (121)$$

Novamente, aplicando-se o somatório em k à equação 121, tem-se que a condição de ortonormalidade 42 é satisfeita e o segundo membro de 121 é nulo, obtendo-se a equação da energia potencial disponível integrada verticalmente para todos os níveis k ($E_P = \sum_{k=1}^K E_{P_k}$) como:

$$E_P = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K (g H_n h_n^2) = \sum_{n=1}^K E_{P_n}. \quad (122)$$

Somando-se as equações 115 e 121 obtém-se a equação da energia total para os modos verticais em cada nível k e suas interações para $m \neq n$:

$$E_{T_k} = \sum_{n=1}^K \frac{g H_n}{2} (u_n^2 + v_n^2 + h_n^2) \Psi_{nk} \Psi_{nk}^T \gamma_n + \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{m=n+1}^K g \sqrt{H_n H_m} (u_n u_m + v_n v_m + h_n \tilde{h}_m) \Psi_{nk} \Psi_{mk}^T \gamma_m. \quad (123)$$

Integrando-se 123 na vertical o segundo termo se anula e a equação resultante representa a energia total e mostrando a partição de energia entre modos verticais (compare com a equação 106 de Kasahara e Puri, 1981):

$$E_T = \sum_{n=1}^K \frac{gH_n}{2} (u_n^2 + v_n^2 + h_n^2). \quad (124)$$

Para os modos horizontais, a energia cinética é definida para cada modo vertical n de acordo com a seguinte equação:

$$E_{C_n} = \frac{gH_n}{2} \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{W}_n, \quad (125)$$

com:

$$\mathbf{W}_n = u_n \hat{\mathbf{i}} + v_n \hat{\mathbf{j}} = \sum_{r=1}^5 (u_{rn} \hat{\mathbf{i}} + v_{rn} \hat{\mathbf{j}}), \quad (126)$$

onde r descreve os 5 modos horizontais definidos anteriormente. Desta forma, das equações 125 e 126 obtém-se:

$$E_{C_n} = \frac{gH_n}{2} \left[\sum_{r=1}^5 (u_{rn} \hat{\mathbf{i}} + v_{rn} \hat{\mathbf{j}}) \right] \cdot \left[\sum_{q=1}^5 (u_{qn} \hat{\mathbf{i}} + v_{qn} \hat{\mathbf{j}}) \right], \quad (127)$$

ou

$$E_{C_n} = \frac{gH_n}{2} \sum_{r=1}^5 \sum_{q=1}^5 (u_{rn} u_{qn} + v_{rn} v_{qn}), \quad (128)$$

A equação 128 pode, então, ser decomposta em dois termos, um contendo a soma da energia cinética de todos os modos horizontais r , para cada nível n , e outro contendo a soma da energia cinética resultante da interação entre os modos horizontais, onde q representa um modo horizontal diferente de r , para cada nível n :

$$E_{C_n} = \frac{gH_n}{2} \left[\sum_{r=1}^5 (u_{rn}^2 + v_{rn}^2) + \sum_{r=1}^4 \sum_{q=r+1}^5 (u_{rn} u_{qn} + v_{rn} v_{qn}) \right]. \quad (129)$$

A equação da energia potencial disponível para os modos horizontais é obtida de forma análoga à dedução anterior. Neste caso, tem-se:

$$E_{P_n} = \frac{gH_n}{2} h_n^2, \quad (130)$$

com $h_n = \sum_{r=1}^5 h_{rn}$

Segue então que:

$$E_{P_n} = \frac{gH_n}{2} \sum_{r=1}^5 \sum_{q=1}^5 (h_{rn} h_{qn}), \quad (131)$$

ou

$$E_{P_n} = \frac{gH_n}{2} \left[\sum_{r=1}^5 (h_{rn}^2) + \sum_{r=1}^4 \sum_{q=r+1}^5 (h_{rn} h_{qn}) \right]. \quad (132)$$

Somando-se as equações 129 e 132 obtém-se a equação da energia total dos modos horizontais para cada modo vertical n e suas interações:

$$E_{T_n} = \frac{gH_n}{2} \left[\sum_{r=1}^5 (u_{rn}^2 + v_{rn}^2 + h_{rn}^2) + \sum_{r=1}^4 \sum_{q=r+1}^5 (u_{rn}u_{qn} + v_{rn}v_{qn} + h_{rn}h_{qn}) \right]. \quad (133)$$

Considerando a integral sobre a esfera, o segundo termo da equação 133, que representa a interação entre modos horizontais para uma mesma altura equivalente, anula-se devido a ortogonalidade das Funções de Hough e a equação da energia total torna-se:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{T_n} &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E_{T_n} a^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda = \\ &= \frac{gH_n}{2} \sum_{r=1}^5 \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\tilde{u}_{rn}^2 + \tilde{v}_{rn}^2 + \tilde{h}_{rn}^2) a^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda = \\ &= \sum_{r=1}^5 \bar{E}_{T_{rn}}. \end{aligned} \quad (134)$$

As equações da geração de energia cinética e de energia potencial disponível, obtidas a partir das equações 13, 14 e 16, bem como a equação de tendência da energia total podem ser expressas, respectivamente, por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_{C_n}) + \frac{\vartheta_n}{\cos \phi} \left(u_n \frac{\partial h_n}{\partial \lambda} + (v_n \cos \phi) \frac{\partial h_n}{\partial \phi} \right) = u_n R_n^u + v_n R_n^v, \quad (135)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_{P_n}) + \frac{\vartheta_n}{\cos \phi} h_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v_n \cos \phi)}{\partial \phi} \right) = h_n R_n^h. \quad (136)$$

A tendência, ou variação local, de energia total pode ser expressa pela soma das equações anteriores, resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_{T_n}) + \frac{\vartheta_n}{\cos \phi} \left(\frac{\partial (h_n u_n)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (h_n v_n \cos \phi)}{\partial \phi} \right) = u_n R_n^u + v_n R_n^v + h_n R_n^h, \quad (139)$$

onde os termos do membro direito da equação 139 indicam a contribuição total dos termos não lineares e forçantes na evolução temporal da energia cinética zonal, energia cinética meridional e energia potencial disponível. Ao se integrar globalmente a equação 138, o segundo termo do lado esquerdo se anula (é um divergente) e, na ausência de fontes e sumidouros, a energia total é conservada. A longo prazo a tendência da energia total tende a zero e as fontes e sumidouros tendem a se compensar.

Interações de Energia entre Modos Horizontais para um mesmo Modo Vertical (Horizontal_Decomposition)

A seguir será considerada a interação energética entre modos horizontais para diferentes alturas equivalentes. Até agora considerou-se a interação entre modos horizontais para um modo vertical fixo. Para obter a interação entre modos verticais diferentes, considera-se a parte da interação vertical da equação 123 dada por:

$$IE_k = \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{m=n+1}^K g \sqrt{H_n H_m} (u_n u_m + v_n v_m + h_n h_m) \Psi_{nk} \Psi_{mk}^T \gamma_m$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{m=n+1}^K g \sqrt{H_n H_m} (IV_{nm}) \Psi_{nk} \Psi_{mk}^T \gamma_m \\
&= \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{m=n+1}^K IE_{nmk}
\end{aligned} \tag{140}$$

e que:

$$u_n = \sum_{r=1}^5 u_{rn} , \tag{141a}$$

$$v_n = \sum_{r=1}^5 v_{rn} , \tag{141b}$$

$$h_n = \sum_{r=1}^5 h_{rn} , \tag{141c}$$

e usando 141 em 140 pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
IV_{nm} &= \sum_{r=1}^5 \sum_{q=1 \neq r}^5 (u_{rn} u_{qm} + v_{rn} v_{qm} + h_{rn} h_{qm}) \\
&= \sum_{r=1}^5 \sum_{q=1 \neq r}^5 IH_{rqnm} .
\end{aligned} \tag{142}$$

onde $n \neq m$ e $r \neq q$. A forma das somatórias em 142 deve ser compatível com 133 e vale salientar que os termos de igualdade ($n = m$ ou $r = q$) ou pertencem ao cálculo da energia ou das interações já calculadas, e não dessas novas interações. Note que r e q representam os cinco tipos de ondas horizontais citados anteriormente. Então, fixando r , q , n e m pode-se calcular IH_{rqnm} , não considerando as somatórias em 142, e substituindo em 140 para calcular IE_{nmk} . Assim ter-se-ia a interação adimensional de energia modal local entre os modos horizontais r e q e entre os modos verticais n e m para o nível de pressão k .

Para minimizar o número de interações pode-se considerar os modos na vertical agrupados pelas classes definidas anteriormente, na horizontal considerar os modos somados pelos números de onda e índice meridional e considerar também quatro faixas nos níveis de pressão na vertical: baixa troposfera ($p_O \geq p > p_B$), média troposfera ($p_B \geq p > p_M$), alta troposfera ($p_M \geq p \geq p_A$) e estratosfera e acima desta ($p_A > p \geq p_T$), com $p_O = 1000$, $p_B = 700$, $p_M = 400$ e $p_A = 200$, todos em hPa, e p_T sendo o nível de pressão mais alto disponível, desde que acima de p_A .

Interações de Energia entre Modos Horizontais para Modos Verticais Diferentes (Interaction_Horizontal_Vertical)

Considerando o descrito acima, pode-se reescrever a interação dimensional entre modos horizontais diferentes r e q para classes verticais diferentes e para uma dada faixa vertical de pressão como:

$$\begin{aligned}
IHV_{rq} &= \sum_{k=1}^{k_2} \sum_{n=na}^{nb} \sum_{m=nc}^{nd} g \sqrt{H_n H_m} (IH_{rqnm}) \Psi_{nk} \Psi_{mk}^T \gamma_m \\
&= \sum_{k=1}^{k_2} \mathcal{H}_{rqk} ,
\end{aligned} \tag{143}$$

onde

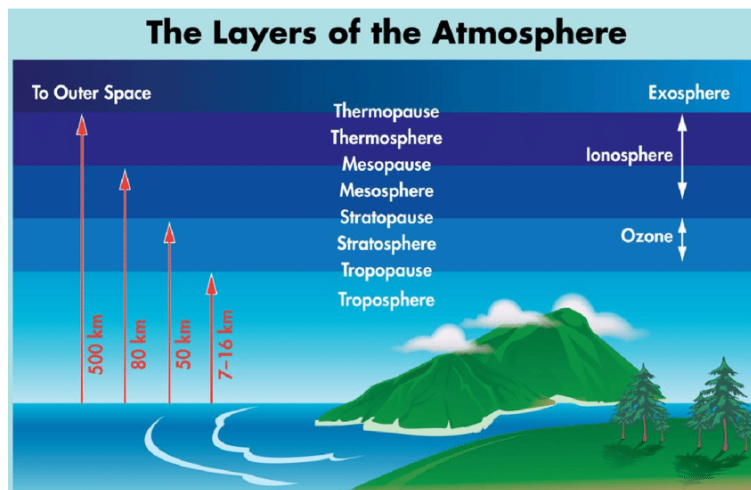
$$\mathcal{H}_{rqk} = \sum_{n=na}^{nb} \sum_{m=nc}^{nd} g \sqrt{H_n H_m} (u_{rn} u_{qm} + v_{rn} v_{qm} + h_{rn} h_{qm}) \Psi_{nk} \Psi_{mk}^T \gamma_m , \tag{144}$$

e os índices $k1$, $k2$ representam os níveis verticais dos limites de pressão de uma dada faixa vertical de pressão, na e nb os índices limites dos modos verticais de uma dada classe vertical e nc e nd os índices verticais limites de outra classe vertical. Por outro lado, dependendo do problema outras faixas verticais de pressão podem ser definidas ou mesmo calcular a interação em um único nível. Essas considerações podem ser aplicadas para as interações horizontais para uma mesma classe vertical; além disso, também pode-se considerar faixas verticais para a interação entre modos verticais. Para efeito de cálculo das interações entre classes verticais diferentes, é interessante calcular primeiramente $\mathcal{H}_{rqk}$ e depois considerar as faixas verticais, se for o caso. Ressalta-se novamente que as equações 140, 142, 143 e 144 não incluem interação entre um mesmo modo horizontal e nem para um mesmo modo vertical, sendo aplicadas para modos verticais diferentes, ou seja, nesse caso $r \neq q$ e $n \neq m$ (veja equações 123 e 133). Em tese, pela equação 144, poder-se-ia considerar haver interação entre modos horizontais iguais ($r = q$), tanto em uma mesma classe ($na = nc ; nb = nd$), quanto em classes diferentes ($na \neq nc ; nb \neq nd$) e até mesmo poder-se-ia calculá-la matematicamente, porém seria um procedimento incoerente com a dedução que levou a essa equação. Na verdade, considerando a definição de interação energética modal aqui apresentada, a “interação” entre um modo com ele mesmo, tanto horizontal quanto vertical, seria a própria energia do modo (veja equação 123 para os modos verticais e 133 para os modos horizontais). Deve-se salientar que pode haver interação entre classes verticais distintas para modos horizontais distintos nos dois sentidos, por exemplo, se uma onda de Rossby ($r = 1$) da classe 0 (na, nb) interage com uma onda de Kelvin ($q = 2$) da classe 1 (nc, nd), também há a interação reversa, e diferente, da onda de Rossby da classe 1 com a onda de Kelvin da classe 0, e assim sucessivamente para outras interações entre classes verticais e outros modos horizontais. Considerando as classes verticais 0, 1, 2, 3, e 4 e os tipos de modos horizontais 1, 2, 3, 4 e 5, há 20 interações verticais entre classes verticais diferentes (0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 1-0, 2-0, 3-0 4-0, 1-2, 1-3, 1-4, 2-1, 3-1, 4-1, 2-3, 2-4, 3-2, 4-2, 3-4 e 4-3) e 10 interações horizontais entre os tipos de modos horizontais (1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5 e 4-5) totalizando 200 interações entre modos horizontais e classes verticais. Note que a interação entre dois tipos de modos horizontais, com classes verticais fixas, se invertida acaba sendo a mesma, porém a mudança de classes verticais muda o valor desta, pois $r \neq q$ (veja equação 144). No caso vertical seria um arranjo sem repetição, ou seja, $5!/3! = 20$ e no caso horizontal seria uma combinação, isto é, $5!/(3!2!) = 10$. Considerando as 4 faixas verticais o total de interações sobe para 800, porém ao se calcular individualmente para cada nível de pressão, esse número seria $200K$, onde K é o número de níveis de pressão usados no estudo. No caso da ERA5 com $K=37$ o total de interações seria $200 \times 37 = 7400$.

Ressalta-se que em todas as interações de energia calculadas dessa forma não se pode definir o sentido delas com esse procedimento.

Análise dos Modos Verticais do Caso de Referência: ERA_5 (Vertical_Modes)

A altura média da tropopausa é 12 km (~ 190 hPa) e, considerando a Atmosfera Padrão dos EUA de 1976 (USSA), a altura média do nível de 200 hPa é de 11,78 km; então os níveis abaixo e incluindo 200 hPa será considerada a troposfera e os acima podem ser considerados como estratosfera até 0,75 hPa (~ 50 km) e acima estaria a mesosfera até 0,01 hPa (~ 80 km). As demais camadas (termosfera e exosfera, figura 3) da atmosfera não tem interesse nesse estudo.



Fonte: <https://www.researchgate.net/>

Figura 3 – Distribuição Vertical das Camadas da Atmosfera.

O caso da reanálise do ECMWF ERA_5 foi escolhido como referência para interpolação vertical de todos os outros casos, pois tem 37 níveis bem distribuídos e com boa distribuição de modos verticais por classes. Além disso, as reanálises do NCEP/NCAR versões 1 (CFSR1) e 2 (CFSV2) possuem os mesmos 37 níveis da ERA_5.

A figura 4 mostra os incrementos de pressão entre os níveis para o ERA_5. Nota-se que há dois saltos no incremento de pressão; esses saltos provocam dois saltos na estrutura vertical do modo barotrópico equivalente (figura 5A). Ao se eliminar os saltos nos níveis de pressão, os saltos na estrutura vertical desse modo também serão eliminados. Não há evidências de que esses saltos afetam significativamente a partição de energia. Considerando incremento de pressão com variação parabólica essas características são eliminadas. Esse era o caso da versão anterior do BAM sigma, onde os incrementos verticais sigma (ou de pressão) seguiam uma parábola para minimizar problemas na discretização vertical do modelo (Peter Kaplan, 1994, NCEP, comunicação pessoal), e a variação da estrutura dos modos verticais ficam suaves, seguindo uma parábola no caso do modo barotrópico equivalente. Na figura 4 também são apresentados os perfis verticais do estado básico de temperatura e de estabilidade estática usados no cálculo dos modos verticais e são obtidos da Atmosfera Padrão dos EUA de 1976 (USSA).

Os 37 níveis de pressão em hPa do caso ERA5 e CFS2 são os seguintes:

1000, 975, 950, 925, 900, 875, 850, 825, 800, 775, 750, 700, 650, 600, 550, 500, 450, 400, 350, 300, 250, 225, 200, 175, 150, 125, 100, 70, 50, 30, 20, 10, 7, 5, 3, 2 e 1.

Nesse caso (ERA5 e CFS2) há 14 níveis na estratosfera, e o topo é em 1 hPa, o qual tem a altura média de aproximadamente 47,5 km. Essa característica implica em ter 5 modos na classe 0 e 6 na classe 1. Isso permite uma boa análise da partição modal de energia e da interação de energia entre as classes. As alturas equivalentes para $n=0$ a $n=36$ são distribuídas pelas classes como:

Classe 0: $n=0$ a 4; $H_0=9746,3$ m a $H_4=641,39$ m (5 modos)

Classe 1: $n=5$ a 10; $H_5=434,54$ m a $H_{10}=125,10$ m (6 modos)

Classe 2: $n=11$ a 18; $H_{11}=98,700$ m a $H_{18}=11,595$ m (8 modos)

Classe 3: $n=19$ a 28; $H_{19}=9,5300$ m a $H_{28}=1,2308$ m (10 modos)

Classe 4: $n=29$ a 36; $H_{29}=0,8940$ m a $H_{36}=0,1487$ m (8 modos)

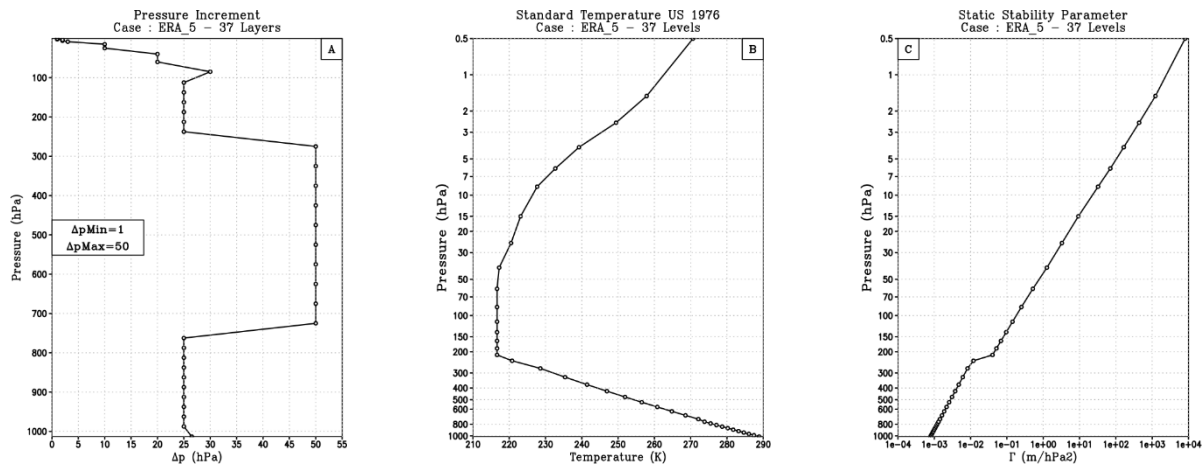


Figura 4 – Intervalos de pressão entre os níveis para o ERA_5 (A), Perfis Verticais do Estado Básico de Temperatura (B) e de Estabilidade Estática (C).

Considerando a reanálise do ECMWF ERA5 e do NCEP/NCAR CFSV2 com 37 níveis pode-se calcular os autovalores e autovetores da estrutura vertical em coordenadas de pressão, da forma descrita anteriormente, que estão apresentadas na figura 5. Para esse cálculo utiliza-se um perfil vertical de temperatura básica derivado com as características da USSA (figura 4).

Pode-se obter as estruturas verticais e as alturas equivalentes de forma analítica considerando a estabilidade estática em coordenada vertical $\ln p$; daí, o modo externo é uma solução exponencial e os demais modos baroclínicos são senoidais com a vertical; nesse caso a altura equivalente é proporcional ao número de vertical, ou seja, quanto menor o H_n , mais zeros tem o modo vertical (Andrade, 1994; Bonatti, 2020). Pela figura 5, o modo externo $n = 0$ (figura 5A, $H_0 = 9746,3 \text{ m}$), tem apenas um sinal em todo o domínio, porém não é constante, além disso, todos os modos são divergentes, por isso a referência mais correta para este modo seria barotrópico equivalente divergente. Os demais modos têm número de zeros de acordo com o índice vertical e ficam com estrutura mais complexa à medida que o número de zeros aumenta (H_n diminui), ou seja, à medida que ficam mais internos (figuras 5B a 5J). Porém, os modos com H_n , $n = 1, 2, 3, 4$ apesar de internos, têm zeros acima de 250 hPa, mostrando uma estrutura barotrópica na troposfera e classificados junto com o modo externo como classe 0 ($H_n \geq 600 \text{ m}$), pois a projeção de energia nesses modos é muito semelhante na troposfera e apresentam energia dominante em latitudes médias no cinturão das altas. Já os modos com H_n , $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ têm máximos em baixos níveis próximo a 850 hPa, zeros em torno de 500 hPa e máximos próximos a 200 hPa (figuras 5B e 5C); esses modos têm energia dominante na região tropical onde há fontes de calor, associadas à convecção profunda, com máximos em torno de 500 hPa e são classificados como classe 1 ($100 \text{ m} \leq H_n < 600 \text{ m}$). As amplitudes dos modos vão ficando maiores em baixos níveis à medida que o modo vai ficando mais interno, porém a estrutura destes modos mais internos é semelhante em baixos níveis; portanto necessita-se de muitos modos normais verticais para representar estruturas na baixa atmosfera tais como fontes de calor com máximos em baixos níveis ou os processos de superfície. Os modos com H_n , $n = 11, 12, \dots, 18$, classificados como classe 2 ($10 \text{ m} \leq H_n < 100 \text{ m}$), estão associados com os processos de camada limite em geral. Os modos com H_n , $n = 19, 20, \dots, 28$, representam a classe 3 ($1 \leq H_n < 10 \text{ m}$), que tem atuação principalmente em regiões montanhosas e processos de superfície e, e os modos com H_n , $n = 29, 30, \dots, 36$, que são classificados como classe 4 ($H_n < 1 \text{ m}$) e apresentam mais atuação em processos de superfície principalmente em médias e altas latitudes sobre os oceanos.

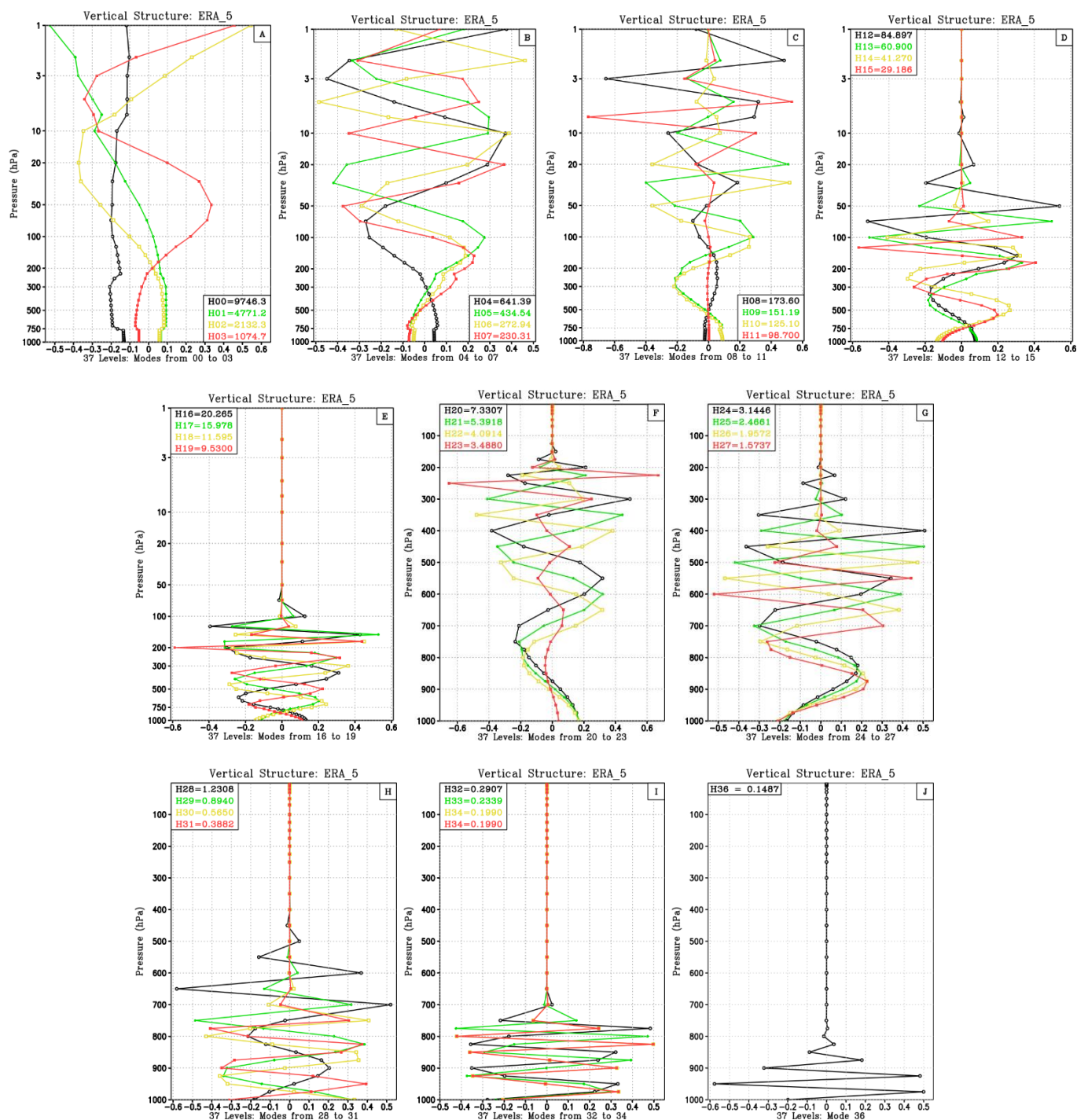


Figura 5 – Estruturas Verticais dos Modos relacionados ao caso ERA5 e CFS2.

Análise dos Modos Horizontais do Caso de Referência: ERA_5 (Hough_Functions/gs)

Nas equações de expansão do potencial de velocidade, função de corrente e altura geopotencial é feito o uso de harmônicos esféricos, como já salientado anteriormente:

$$F(\lambda, \mu, k, t) = \sum_{s=-M}^M \sum_{\ell=|s|}^{N(s)} F_{r,n}^{s,\ell}(k, t) P_{\ell}^s(\mu) \exp(is\lambda)$$

onde: $\mu = \sin \varphi$,

$P_\ell^s(\mu)$ é a Função Associada de Legendre, representando a transformada em latitude e $\exp(is\lambda)$ representa a Transformada de Fourier em longitude,

s é o harmônico zonal = 1, 2, ... , M ,

M é o truncamento zonal,

ℓ é o índice do modo meridional = $|s|$, $|s| + 1, \dots$, $N(s)$, e

$N(s)$ é o truncamento meridional (figura 6),

= M = Triangular,

= $|s| + M$ = Romboidal.

Há duas formas de representar o espectro: a primeira é com frequências negativas (propagação para oeste) e positivas (propagação para leste) e números de onda zonais positivos e a segunda é com frequências positivas e números de onda zonais negativos (propagação para oeste) e positivos (propagação para leste). Na equação de expansão anterior é utilizado a segunda forma. A figura 6 apresenta uma representação esquemática dos truncamentos triangular e romboidal com um número de modos semelhante, para $s \geq 0$. Há dois casos nas equações até aqui analisadas baseados nas propriedades de simetria em relação ao equador das funções associadas de Legendre:

I) Caso simétrico:

$\ell = s + 2j - 1$: função de corrente antissimétrica;

$\ell = s + 2k - 2$: potencial de velocidade e altura simétricas.

II) Caso antissimétrico:

$\ell = s + 2k - 2$: função de corrente simétrica;

$\ell = s + 2j - 1$: potencial de velocidade e altura antissimétricas.

Onde:

$j = 1, 2, \dots, L(s) = [N(s) - s + \text{mod}(N(s) - s, 2)]/2$;

$k = 1, 2, \dots, K(s) = L(s) + 1 - \text{mod}(N(s) - s, 2)$.

Representação Esquemática dos Truncamentos:
Triangular (M_T) e Romboidal (M_R)

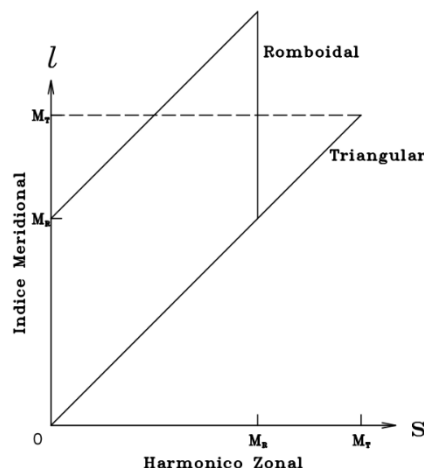


Figura 6 – Representação esquemática dos truncamentos romboidal e triangular.

Pode-se sumarizar os modos horizontais da seguinte forma:

- $s = 0, \omega_{r,n}^{s,\ell} = 0$:

Simétrico:	$L(0)$	Modos de Rossby (leste)
	1	Modo de Kelvin (oeste)
Antissimétrico:	$K(0) - 1$	Modos de Rossby (leste)

- $s = 0, \omega_{r,n}^{s,\ell} \neq 0$:

Simétrico:	$2K(0) - 2$	Modos de Gravidade Inercial (oeste e leste)
Antissimétrico:	$2L(0) - 1$	Modos de Gravidade Inercial (oeste e leste)
	1	Modo Misto Rossby-Gravidade (leste)

- $s \neq 0, \omega_{r,n}^{s,\ell} \neq 0$:

Simétrico:	$L(s)$	Modos de Rossby (leste)
	$2K(s) - 1$	Modos de Gravidade Inercial (oeste e leste)
	1	Modo de Kelvin (oeste)
Antissimétrico:	$K(s) - 1$	Modos de Rossby (leste)
	$2L(s)$	Modos de Gravidade Inercial (oeste e leste)
	1	Modo Misto Rossby-Gravidade (leste)

No primeiro caso, as ondas são estacionárias ($\omega_{r,n}^{s,\ell} = 0$). Nos demais casos, as ondas de Rossby e a mista Rossby-gravidade se propagam para oeste ($\omega_{r,n}^{s,\ell} < 0$); as ondas de Kelvin se propagam para leste ($\omega_{r,n}^{s,\ell} > 0$), enquanto para as ondas de gravidade inercial há modos que se propagam para leste e outros para oeste.

Análise da Frequência (Hough_Functions/gs)

A seguir são apresentadas algumas figuras de frequência e de estruturas horizontais para alturas equivalentes e modos selecionados. Todos as figuras são para o caso de referência ERA_5: modo barotrópico com $\epsilon_n = 9$ e $H_n = 9.746,3$ m e o modo baroclínico com H_n mais próximo de 250 m com $\epsilon_n = 382,6$ e $H_n = 230,3$ m. O modo externo barotrópico equivalente é o que tem a maior energia no cinturão de altas em latitudes médias e modo interno citado é o que tem a maior energia na região tropical, principalmente onde há convecção ativa (Silva Dias e Bonatti, 1986).

As figuras 7, 8 e 9 apresentam a frequência adimensional em função do número de onda zonal para os diversos tipos de ondas: Rossby e mista Rossby-gravidade (7), gravidade leste e Kelvin (8) e gravidade oeste (9).

A seguir será feita uma breve análise das figuras 7, 8, 9. Comparando as figuras &A (modo externo) e 7B (modo interno) para os modos de Rossby e Misto Rossby-gravidade as frequências ficam bem mais baixas para o modo interno tanto para a onda de Rossby ($\sim -0,14$ em $s = 2$ para $\sim -0,06$ em $s = 7$) quanto para a onda Mista Rossby-gravidade (de $\sim -0,60$ em $s =$

0 para $\sim -0,22$ em $s = 0$), e a onda estacionária de Rossby ($\partial\omega/\partial k = 0$) para propagação de energia fica em ondas mais curtas com S indo de 2 para 7 para o primeiro modo meridional. Comparando as figuras 8A (modo externo) e 8B (modo interno) tanto para modos de gravidade leste quanto para modos de Kelvin, as frequências ficam também bem mais baixas para o modo interno; para as ondas de gravidade para leste as frequências adimensionais variam, para os modos e números de onda grafados, de $\sim 0,8$ a $\sim 3,6$ em $s = 0$ e de $\sim 5,4$ a $\sim 9,8$ em $s = 16$ para o modo externo; de $\sim 0,22$ a $\sim 0,91$ em $s = 0$ e de $\sim 0,91$ a $\sim 1,5$ em $s = 16$, para o modo interno; para as ondas de Kelvin a frequência adimensional é de $\sim 5,5$ em $s = 16$ para o modo externo e de $\sim 0,81$ em $s = 16$ para o modo interno, lembrando que em $s = 0$ a frequência da onda de Kelvin é nula.

Comparando as figuras 9A (modo externo) e 9B (modo interno) os modos de gravidade oeste ficam com frequências bem mais baixas para o modo interno, com as frequências adimensionais variando de $\sim -4,2$ a $\sim -1,0$ em $s = 0$ e de $\sim -8,9$ a $\sim -5,4$ em $s = 16$ para o modo externo; e $\sim -0,99$ a $\sim -0,39$ em $s = 0$ e de $\sim -1,48$ a $\sim -0,89$ em $s = 16$ para o modo interno. A onda estacionária de gravidade oeste fica relativamente mais longa com S indo de 2 para 1 para o primeiro modo meridional, sendo que para o modo externo a onda estacionária permanece em $s = 1$ para todos os modos meridionais grafados.

Portanto, em geral, a frequência diminui com a diminuição da altura equivalente e a onda estacionária de Rossby fica mais curta e mais longa para a onda de gravidade oeste.

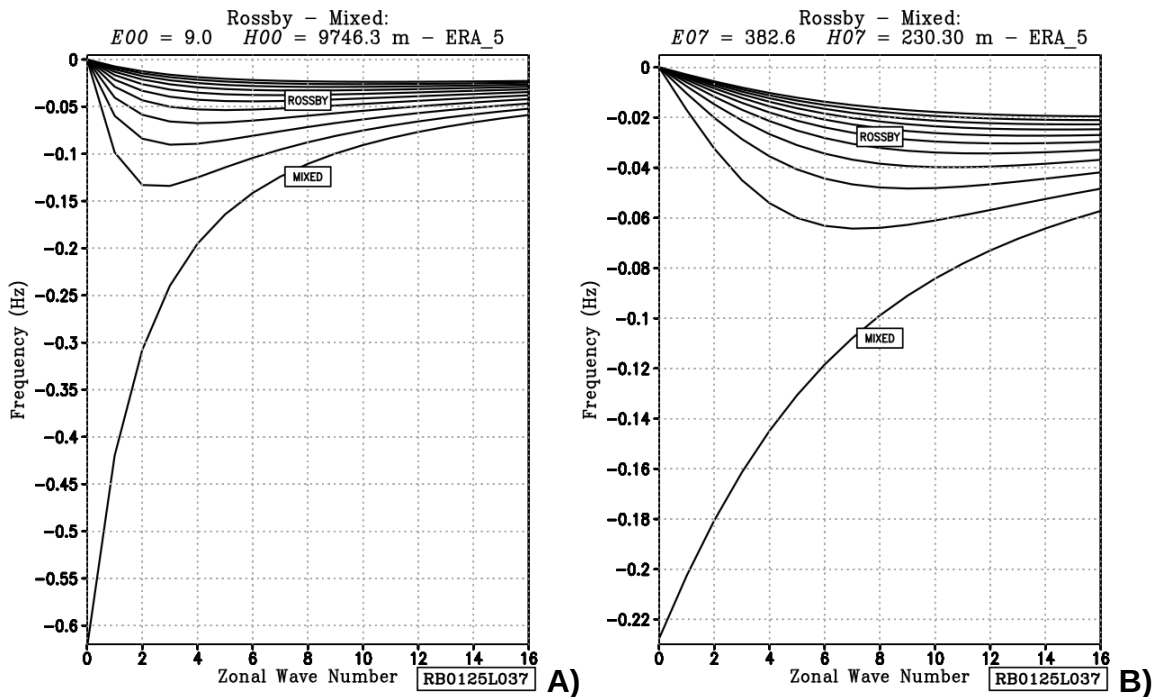


Figura 7 – Frequências das ondas de Rossby e Mista Rossby-gravidade para $H_n = 9.746,3 \text{ m}$ (A) e $H_n = 230,3 \text{ m}$ (B).

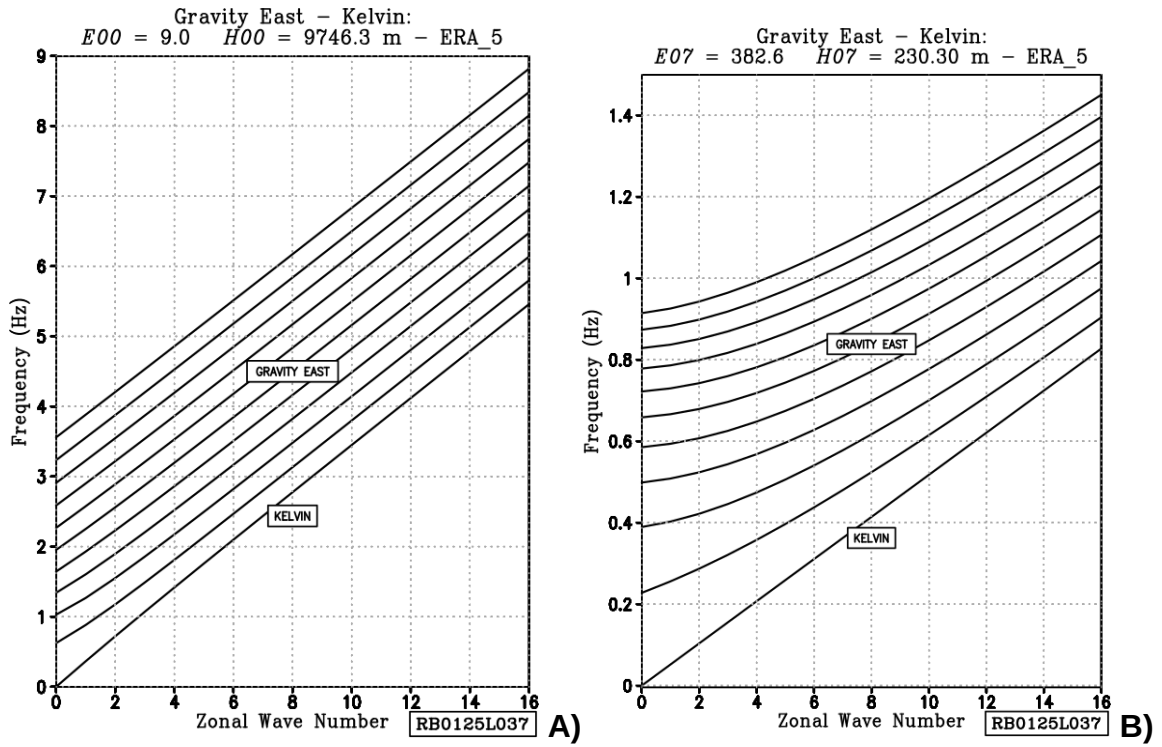


Figura 8 – Frequências das ondas de gravidade para leste e Kelvin para $H_n = 9.746,3$ m (A) e $H_n = 230,3$ m (B). Continuação.

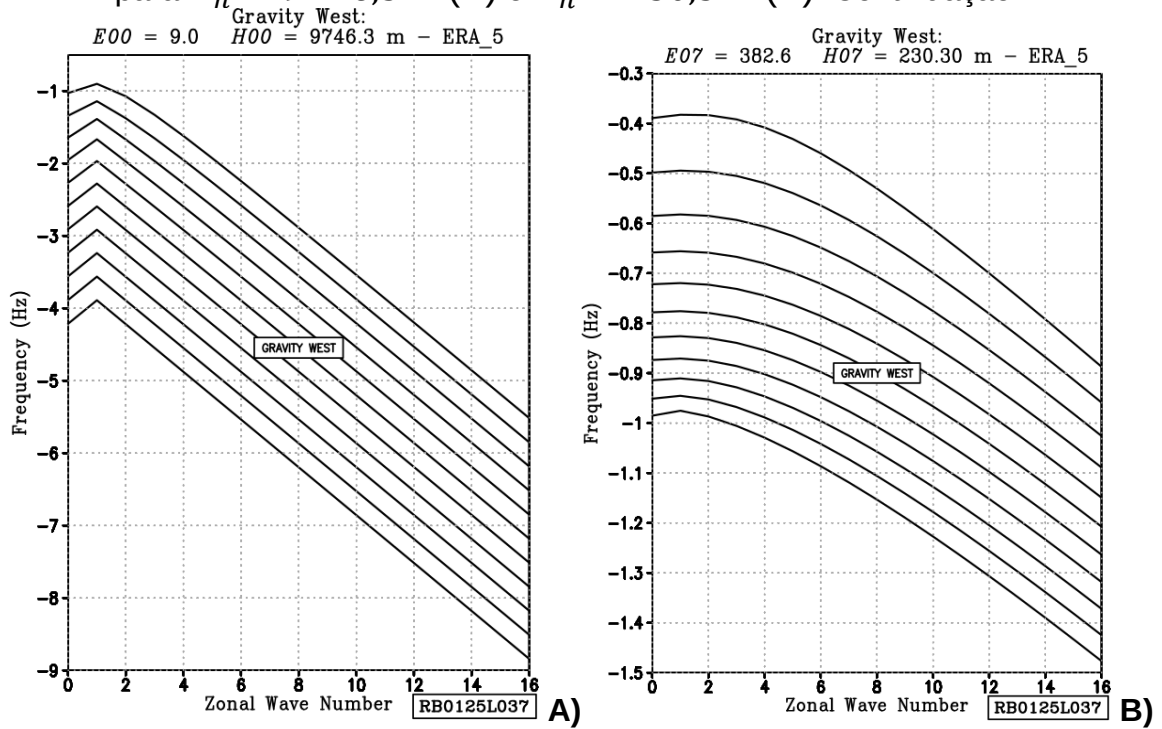


Figura 9 – Frequências das ondas de gravidade para oeste para $H_n = 9.746,3$ m (A) e $H_n = 230,3$ m (B). Continuação.

Análise das Estruturas Horizontais (Hough_Functions/gs)

A figura 10 a 21 apresentam estruturas horizontais para alguns modos selecionados de Rossby, de Kelvin, Misto Rossby-gravidade e de gravidade oeste e de gravidade leste. Todos os modos exibidos nessas figuras têm altura equivalente $H_n = 9.746,3$ m, com $\epsilon_n = 9$, correspondendo ao modo externo do caso de referência ERA_5.

Os modos de Rossby mostrados nas figuras de 10 a 13 mostram uma tendência ao balanço geostrófico entre o vento e o campo de geopotencial tal que a velocidade meridional está em balanço geostrófico aproximado com o campo de geopotencial para ondas longas, enquanto a velocidade zonal o está para ondas curtas. Isso implica que a tendência local da velocidade zonal é grande para ondas longas e a tendência local da velocidade meridional é pequena para ondas curtas. Para ℓ grande o gradiente de geopotencial na região equatorial é menor que para ℓ pequeno; porém, a intensidade do vento é forte nessa região pois a tendência para a geostrofia desses modos na região equatorial faz com que a velocidade seja grande, desde que o parâmetro de Coriolis é pequeno. A máxima amplitude do campo de geopotencial desloca-se para altas latitudes com o acréscimo de ℓ e as latitudes onde há vento máximo dependem de ℓ , mas não há nenhuma preferência latitudinal definida.

As ondas de Rossby apresentadas nas figuras 10 e 12 são simétricas (vento zonal e geopotencial simétricos e vento meridional antissimétrico em relação ao Equador) e as das figuras 11 e 13 são antissimétricas (vento zonal e geopotencial antissimétricos e vento meridional simétrico em relação ao Equador). Ainda em relação às ondas de Rossby, a sua propagação está associada ao campo de vorticidade. Lembre-se que a vorticidade é positiva para baixa no Hemisfério Norte (HN) e alta no Hemisfério Sul (HS), e negativa para alta no HN e baixa no HS. Na região da alta central da figura 10 há altas tanto no HN quanto no HS (modo simétrico), então, nessa região de alta no HN a vorticidade é negativa e positiva no HS. Considerando a alta do HS, na sua região NE o vento é praticamente zonal e negativo, diminuindo para a região central da alta. O inverso ocorre na região NO da alta. Então, na região norte da alta do HS, tem-se que a advecção principal de vorticidade é a zonal. Ao NE da alta do HS o gradiente zonal de vorticidade é negativo e o vento negativo, dando advecção de vorticidade positiva; o oposto ocorre a NO da alta do HS, com advecção negativa. Então, a vorticidade tende a crescer a NE da alta do HS e decrescer a NO. Como o máximo de vorticidade está na região central da alta do HS, então, a tendência é que esse máximo se propague para leste.

Nas figuras 14 e 15 encontram-se exemplos de estrutura de onda de Kelvin, que é um modo simétrico. Nota-se um balanço geostrófico entre a velocidade zonal e o gradiente meridional de geopotencial com velocidade meridional quase nula. Como a onda de Kelvin é um tipo de onda de gravidade, a sua propagação está associada ao campo de divergência. Há convergência entre a alta e a baixa a leste e divergência entre a alta e a baixa a oeste, caracterizando propagação dessa onda para leste. O geopotencial tende a diminuir devido à diminuição de massa na região onde há divergência, e a aumentar na região onde há convergência, então, a baixa a oeste da alta e a alta tendem a se propagar para leste. Com o aumento do número de onda (figura 15) as estruturas tendem a se confinarem mais próximas ao Equador.

As figuras 16 e 17 apresentam exemplos de onda mista Rossby-gravidade, que é um modo antissimétrico. Essa onda apresenta dois vórtices bem definidos e centrados no Equador, o que é uma característica dos modos antissimétricos. Nota-se que o vento meridional cruza o Equador, correspondendo a uma troca de massa entre os hemisférios (compare as figuras 16 com 10). Ao contrário das ondas puras de gravidade, a onda mista tem uma tendência marcante para a geostrofia em altas latitudes, porém na região equatorial o escoamento cruza as isolinhas de geopotencial, mostrando características de onda de gravidade e a predominância do movimento

meridional nessa região, o que demonstra o caráter misto desse modo. Quanto à sua propagação pode-se usar o critério da vorticidade em latitudes médias e o da divergência na região equatorial e, da mesma forma que o modo de Kelvin, também apresenta confinamento próximo ao Equador com o aumento do número de onda (figura 17).

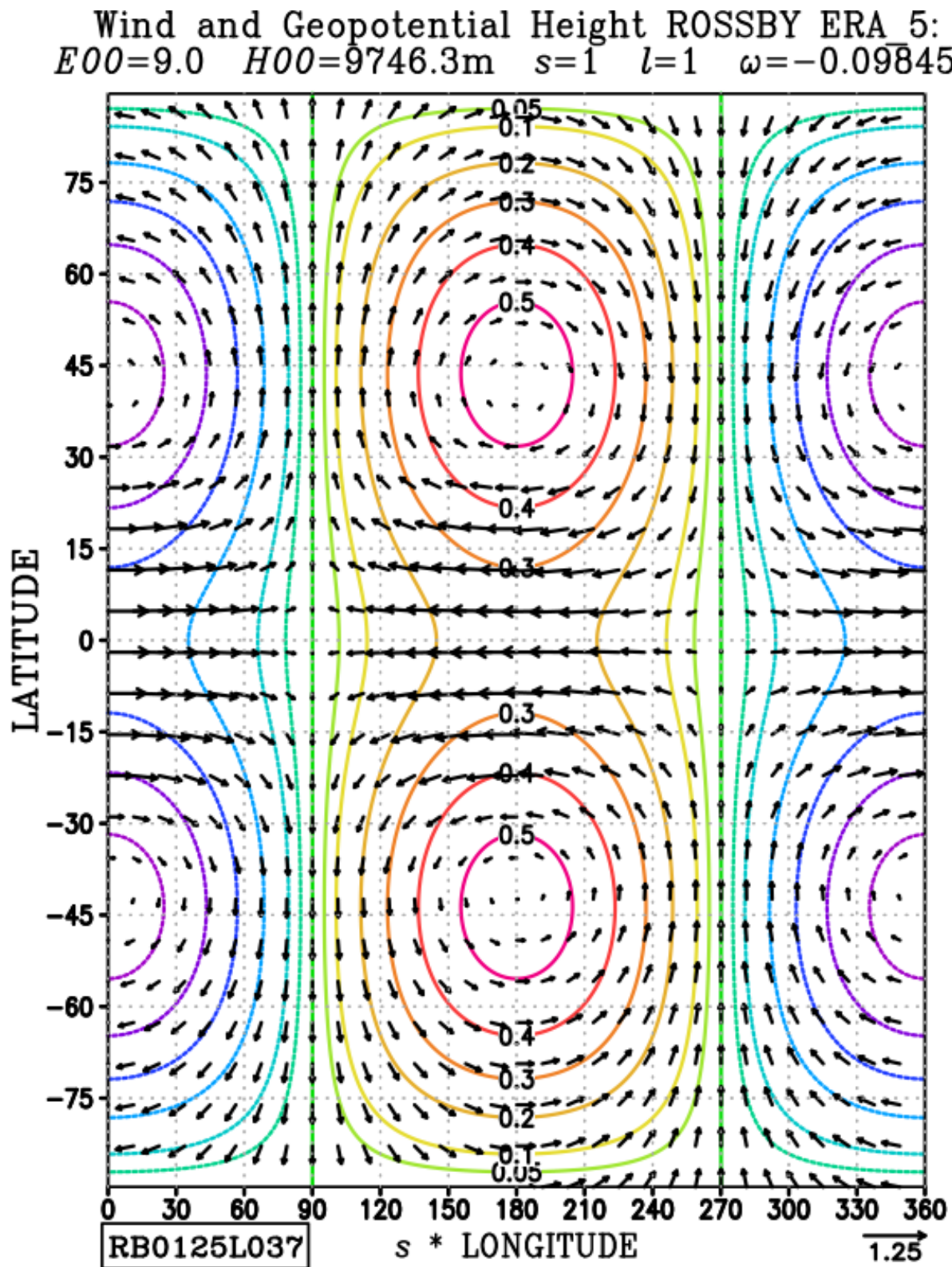


Figura 10 – Onda de Rossby para $\epsilon_n = 9$, $s = 1$, $\ell = 1$ e frequência $\omega = -0,098543$.

Wind and Geopotential Height ROSSBY ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=1$ $l=6$ $\omega=-0.016488$

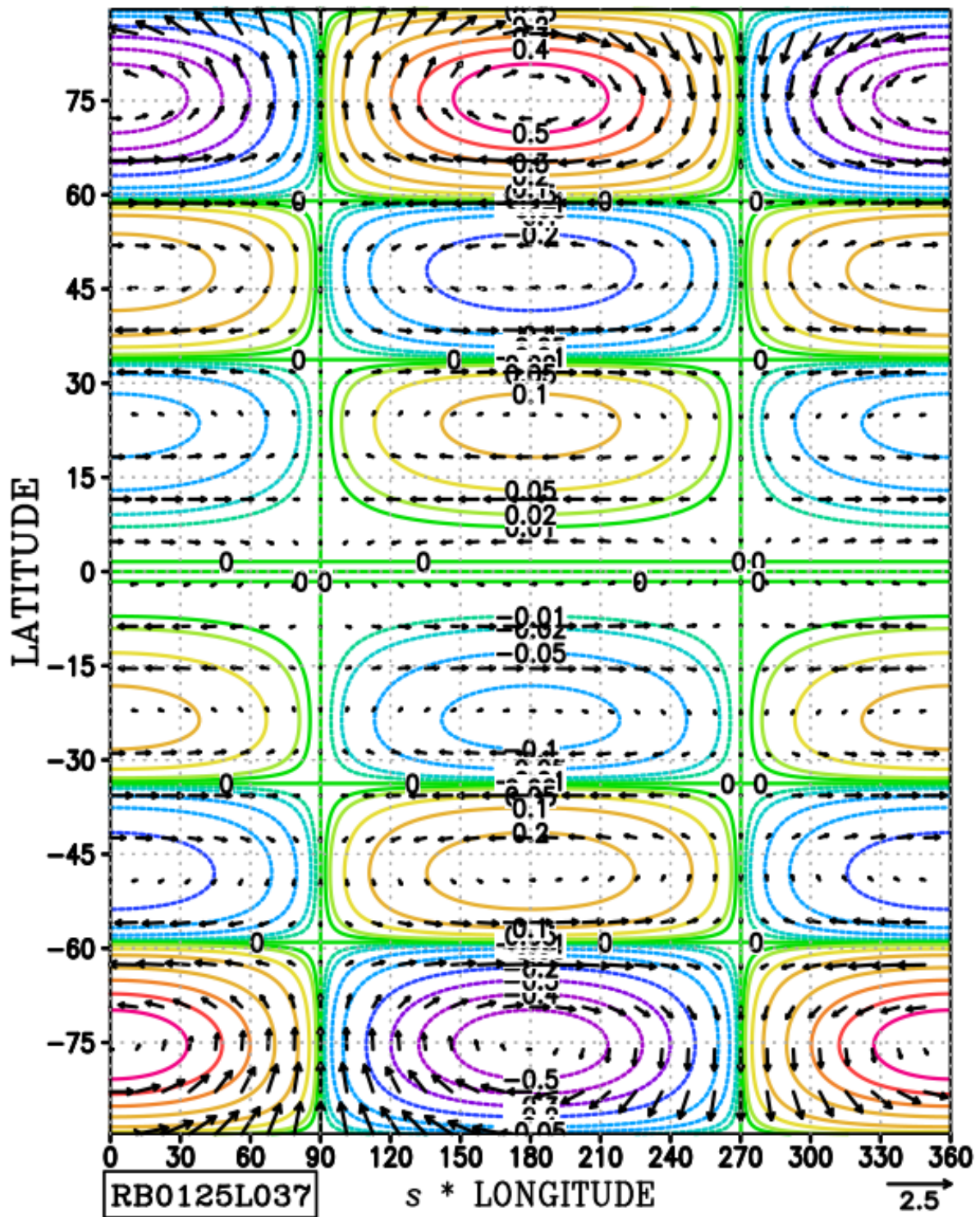


Figura 11 – Onda de Rossby para $\epsilon_n = 9$, $s = 1$, $\ell = 6$ e frequência $\omega = -0,016488$.

Wind and Geopotential Height ROSSBY ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=6$ $l=1$ $\omega=-0.104324$

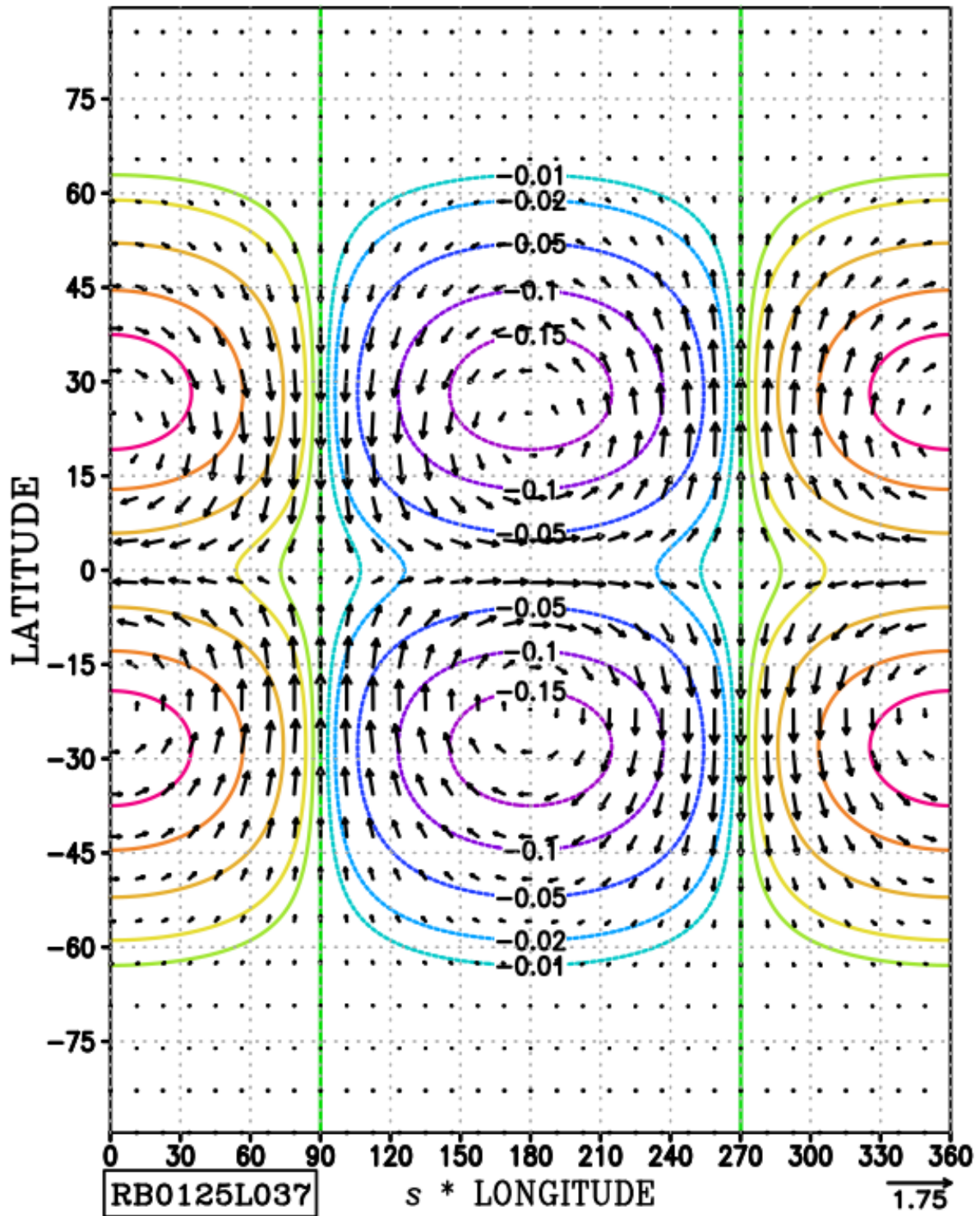


Figura 12 – Onda de Rossby para $\epsilon_n = 9$, $s = 6$, $\ell = 1$ e frequência $\omega = -0,104324$.

Wind and Geopotential Height ROSSBY ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=6$ $l=6$ $\omega=-0.037616$

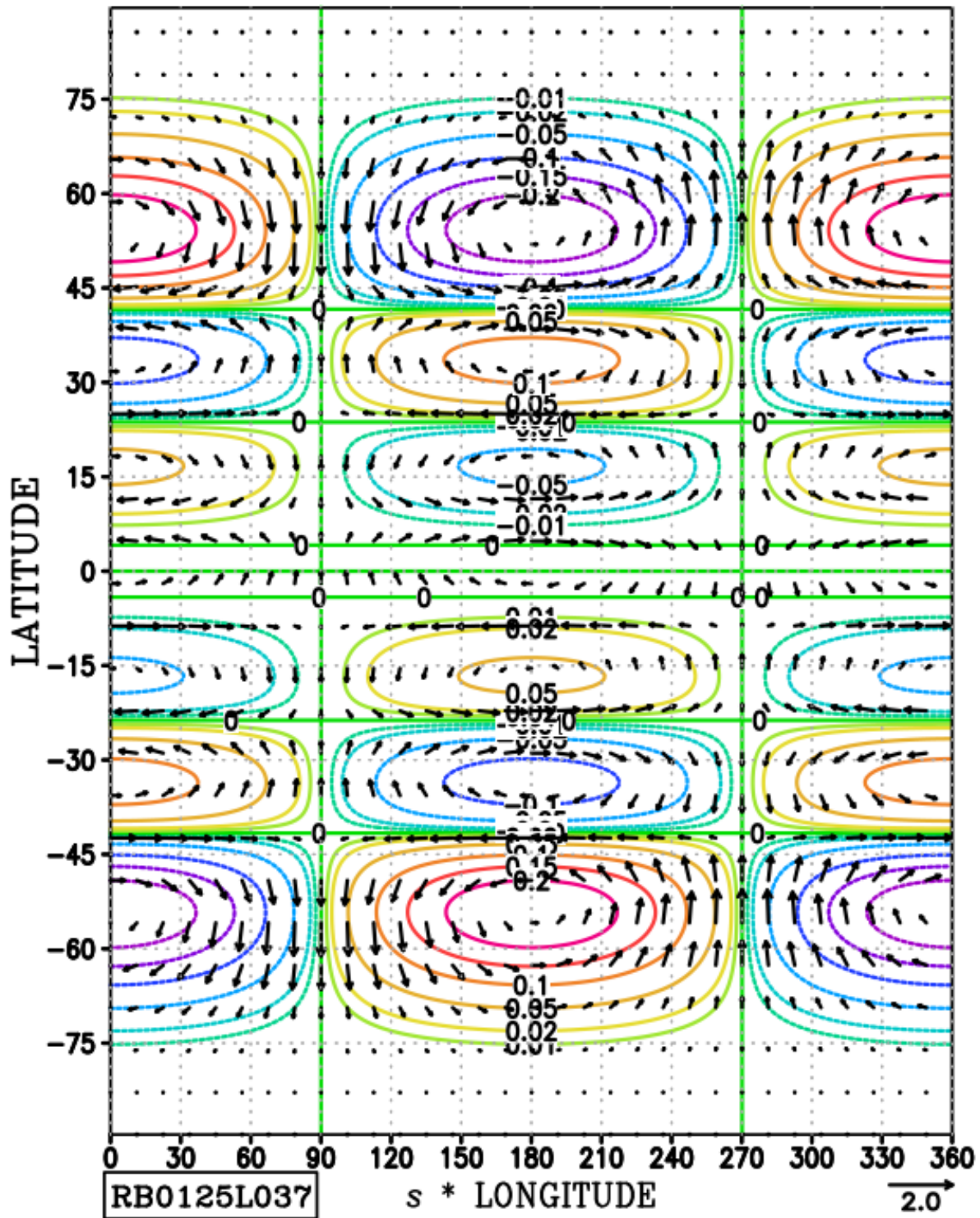


Figura 13 – Onda de Rossby para $\epsilon_n = 9$, $s = 6$, $\ell = 6$ e frequência $\omega = -0,037616$.

Wind and Geopotential Height KELVIN ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=1$ $l=-1$ $\omega=0.364004$

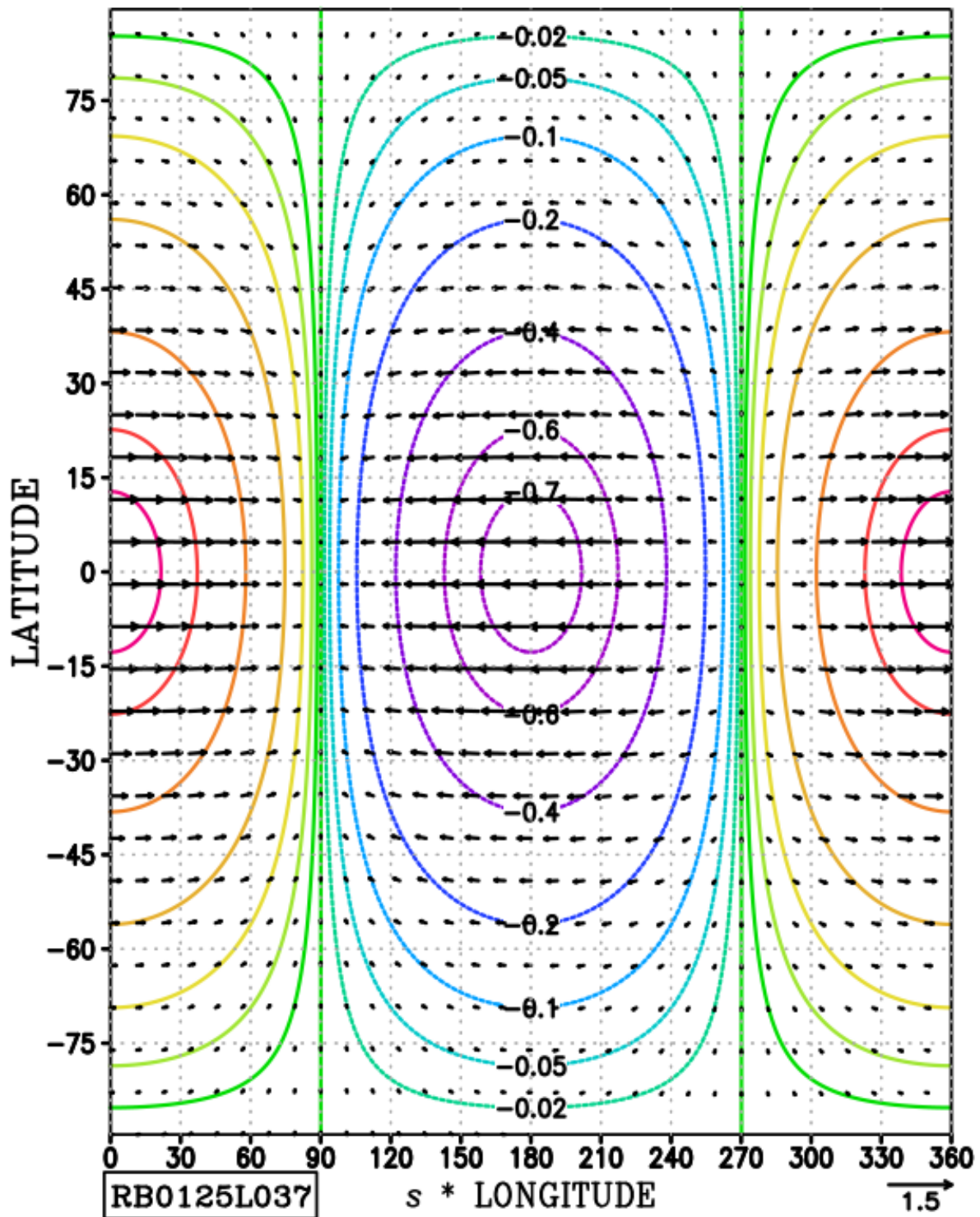


Figura 14 – Onda de Kelvin para $\epsilon_n = 9$, $s = 1$, $\ell = -1$ e frequência $\omega = 0,364004$.

Wind and Geopotential Height KELVIN ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=6$ $l=-1$ $\omega=2.099177$

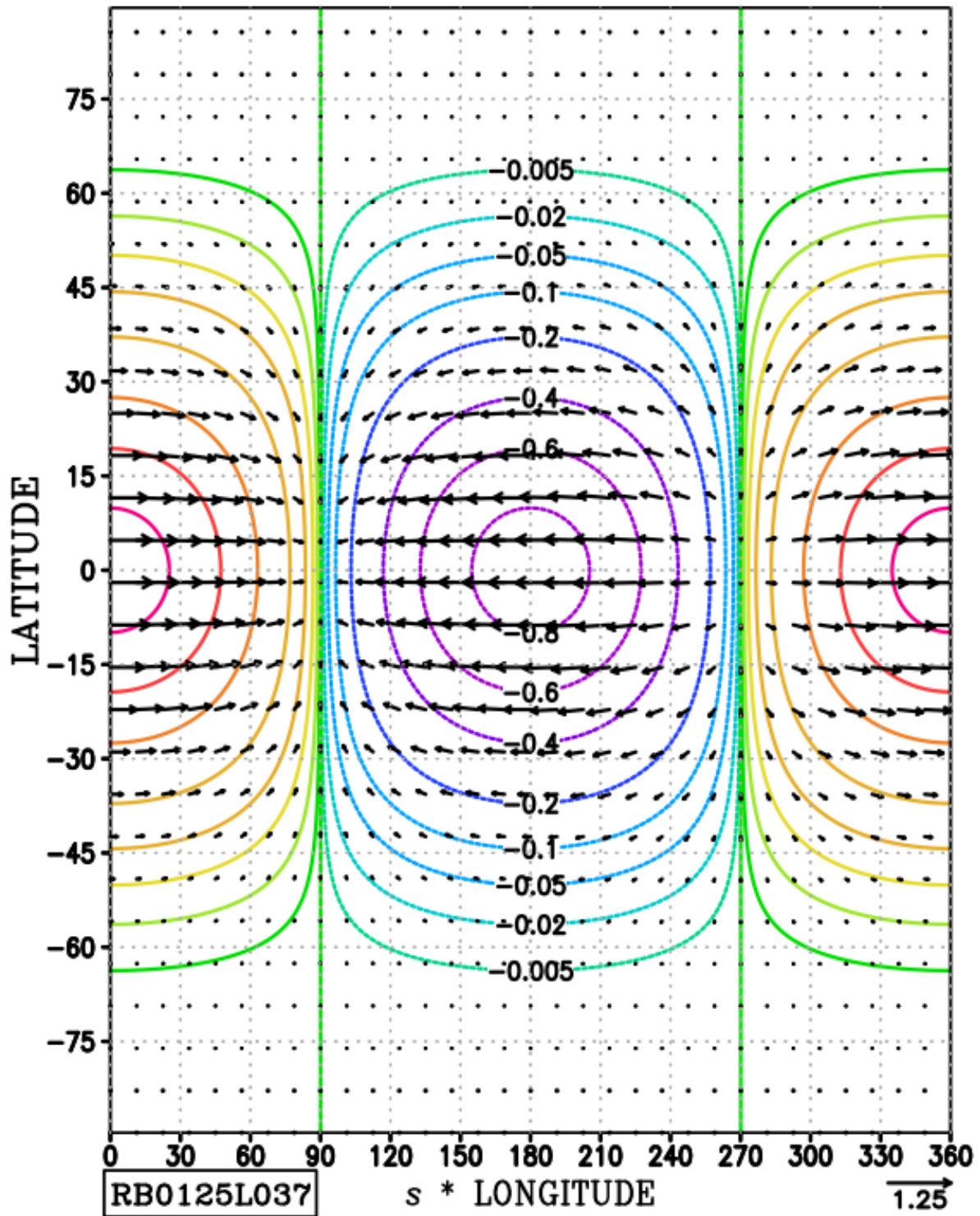


Figura 15 – Onda de Kelvin para $\epsilon_n = 9$, $s = 6$, $\ell = -1$ e frequência $\omega = 2,099177$.

Wind and Geopotential Height MIXED ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=1$ $l=0$ $\omega=-0.419670$

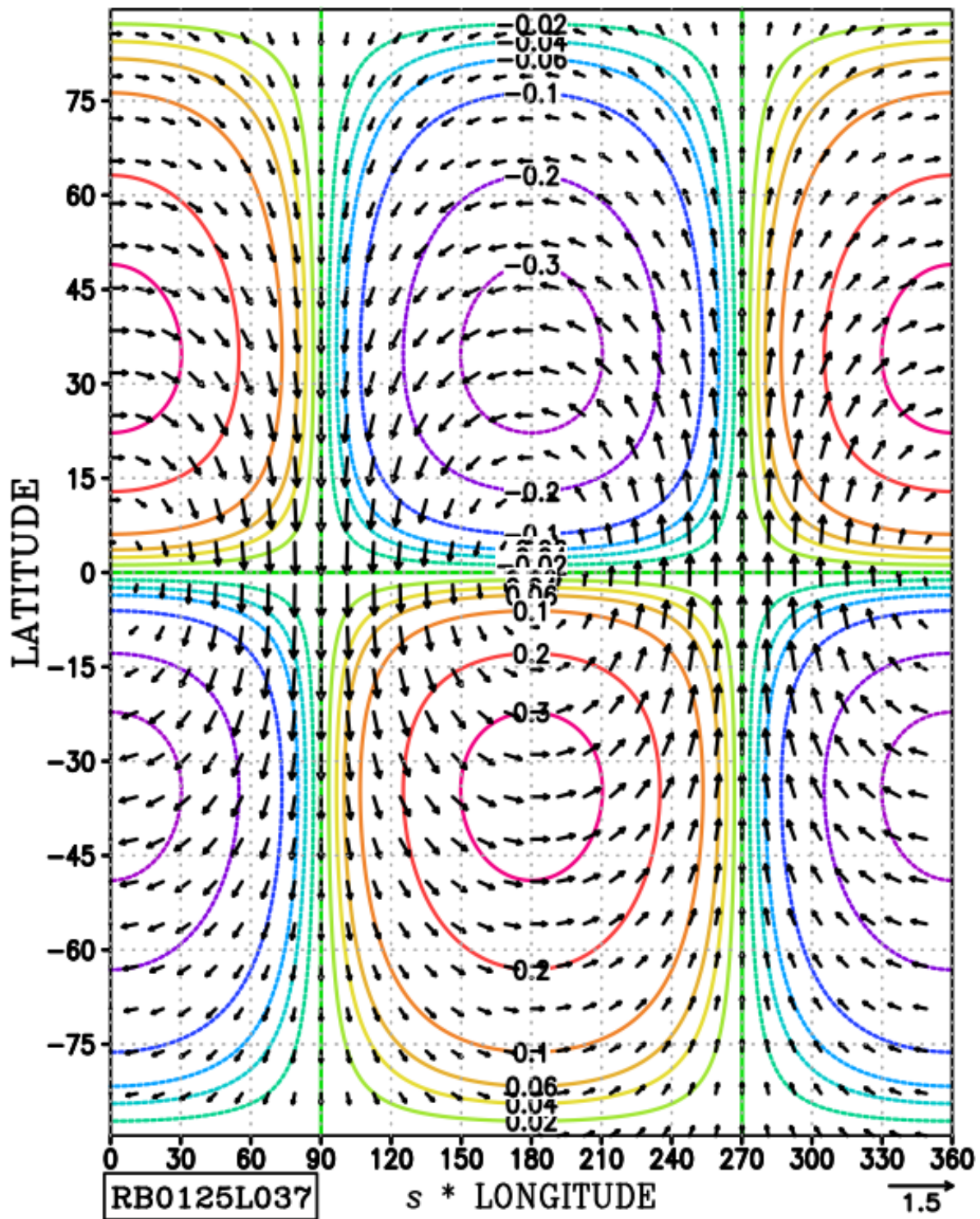


Figura 16 – Onda mista Rossby-gravidade para $\epsilon_n = 9$, $s = 1$, $\ell = 0$ e frequência $\omega = -0,419670$.

Wind and Geopotential Height MIXED ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=6$ $l=0$ $\omega=-0.141424$

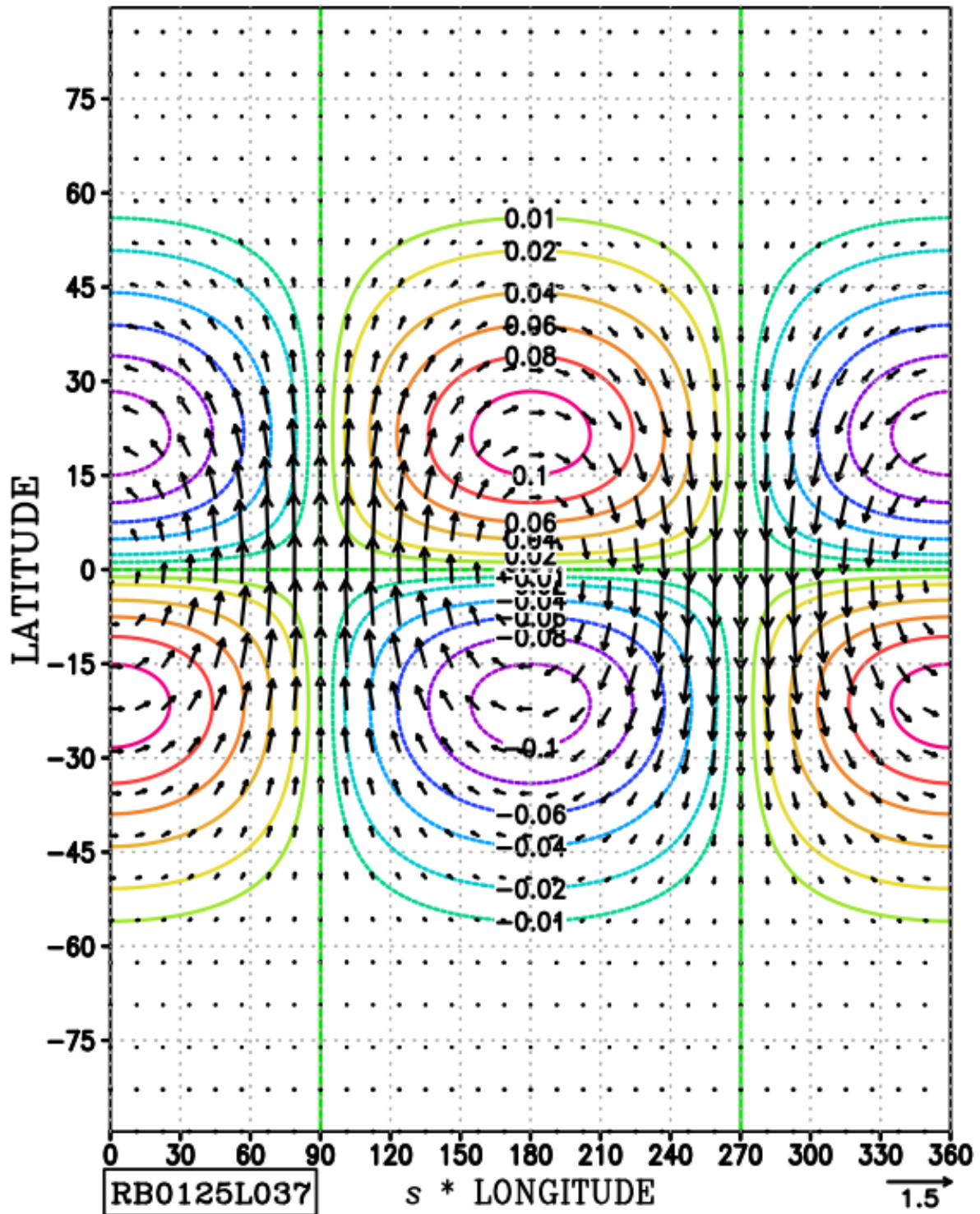


Figura 17 – Onda mista Rossby-gravidade para $\epsilon_n = 9$, $s = 6$, $\ell = 0$ e frequência $\omega = -0,141424$.

Wind and Geopotential Height GRAV EAST ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=1$ $l=1$ $\omega=1.267300$

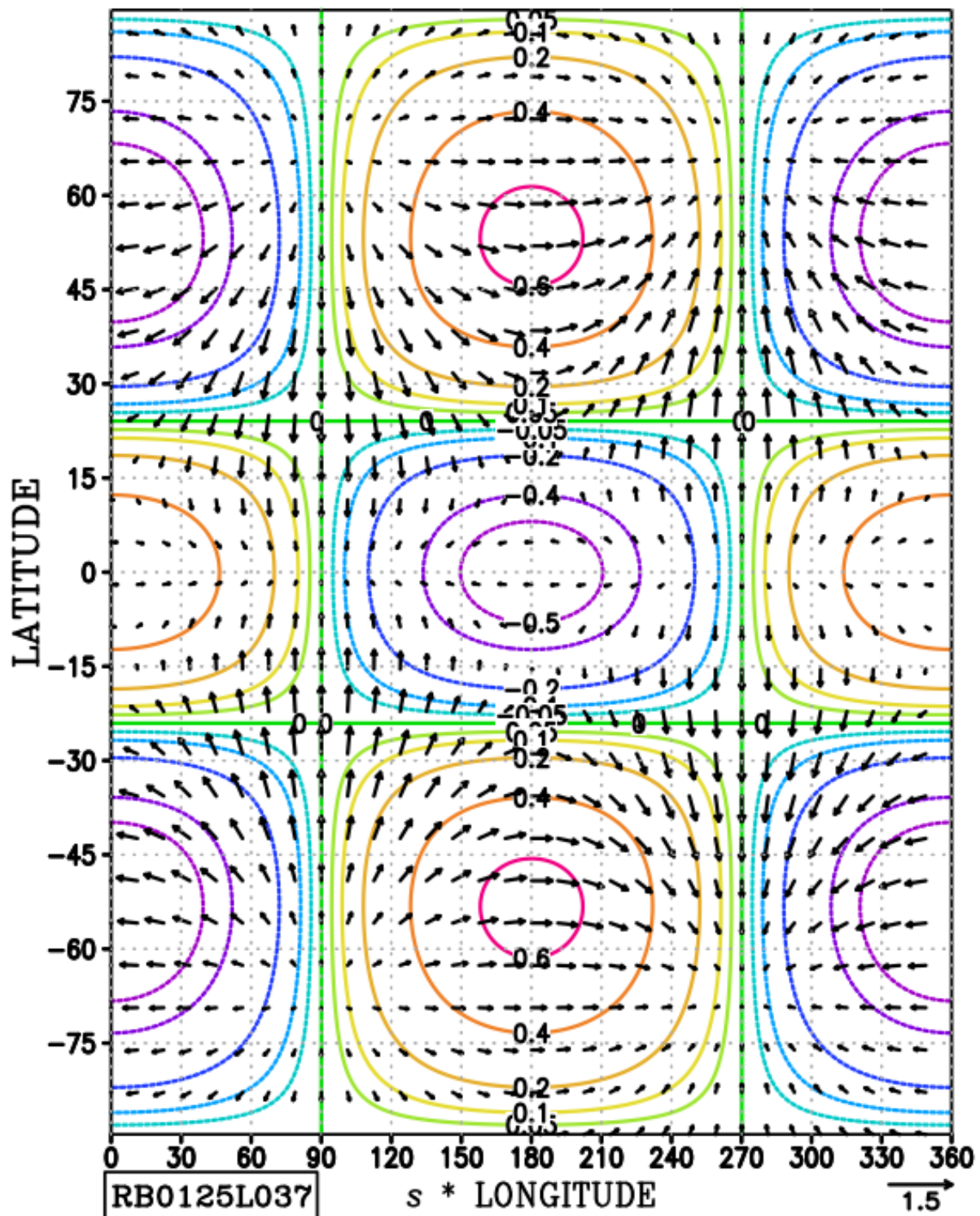


Figura 18 – Onda de gravidade leste para $\epsilon_n = 9$, $s = 1$, $\ell = 1$ e frequência $\omega = 1,267300$.

Wind and Geopotential Height GRAV EAST ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=6$ $l=1$ $\omega=2.822245$

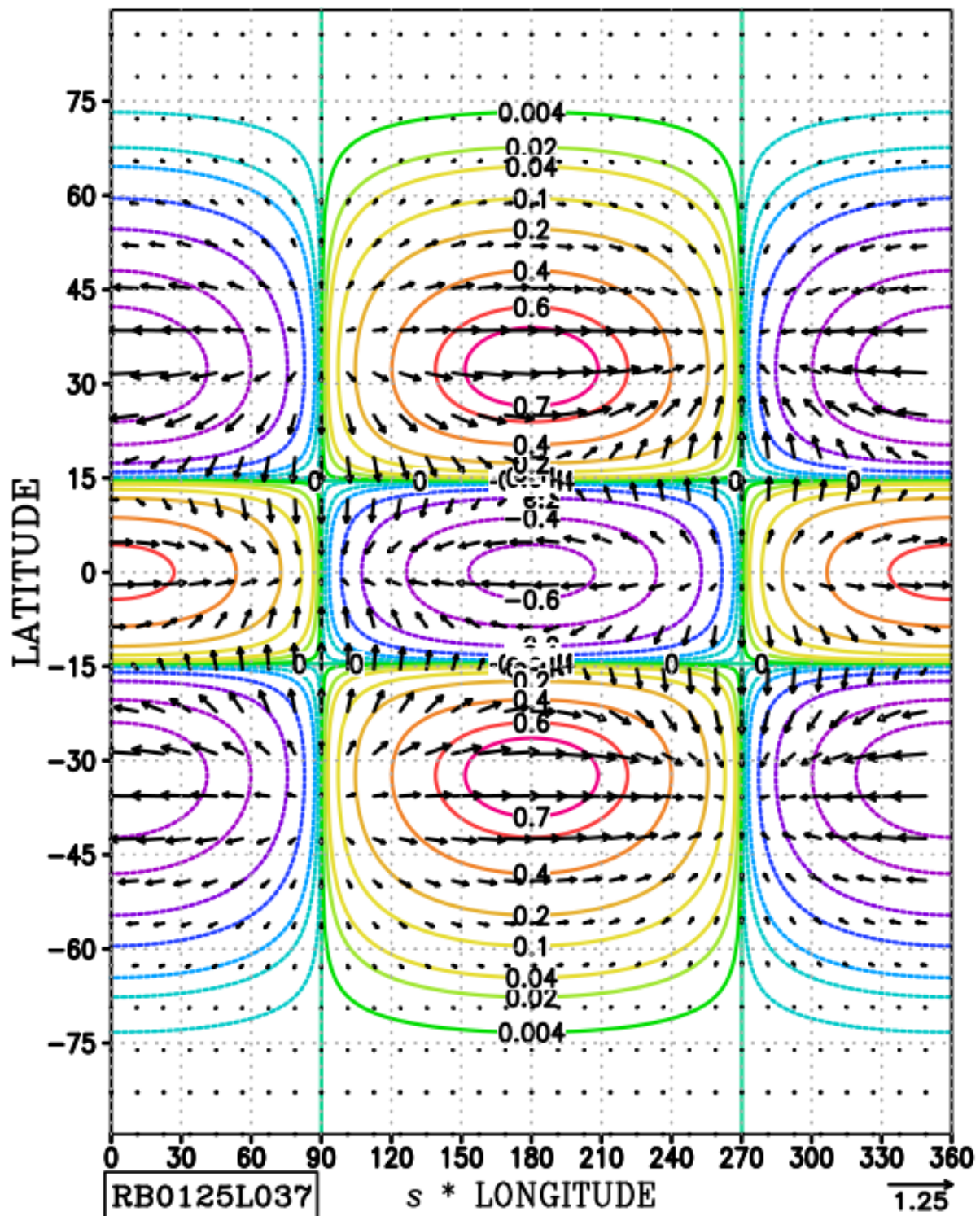


Figura 19 – Onda de gravidade leste para $\epsilon_n = 9$, $s = 6$, $\ell = 1$ e frequência $\omega = 2,822245$.

Wind and Geopotential Height GRAV WEST ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=1$ $l=1$ $\omega=-0.901414$

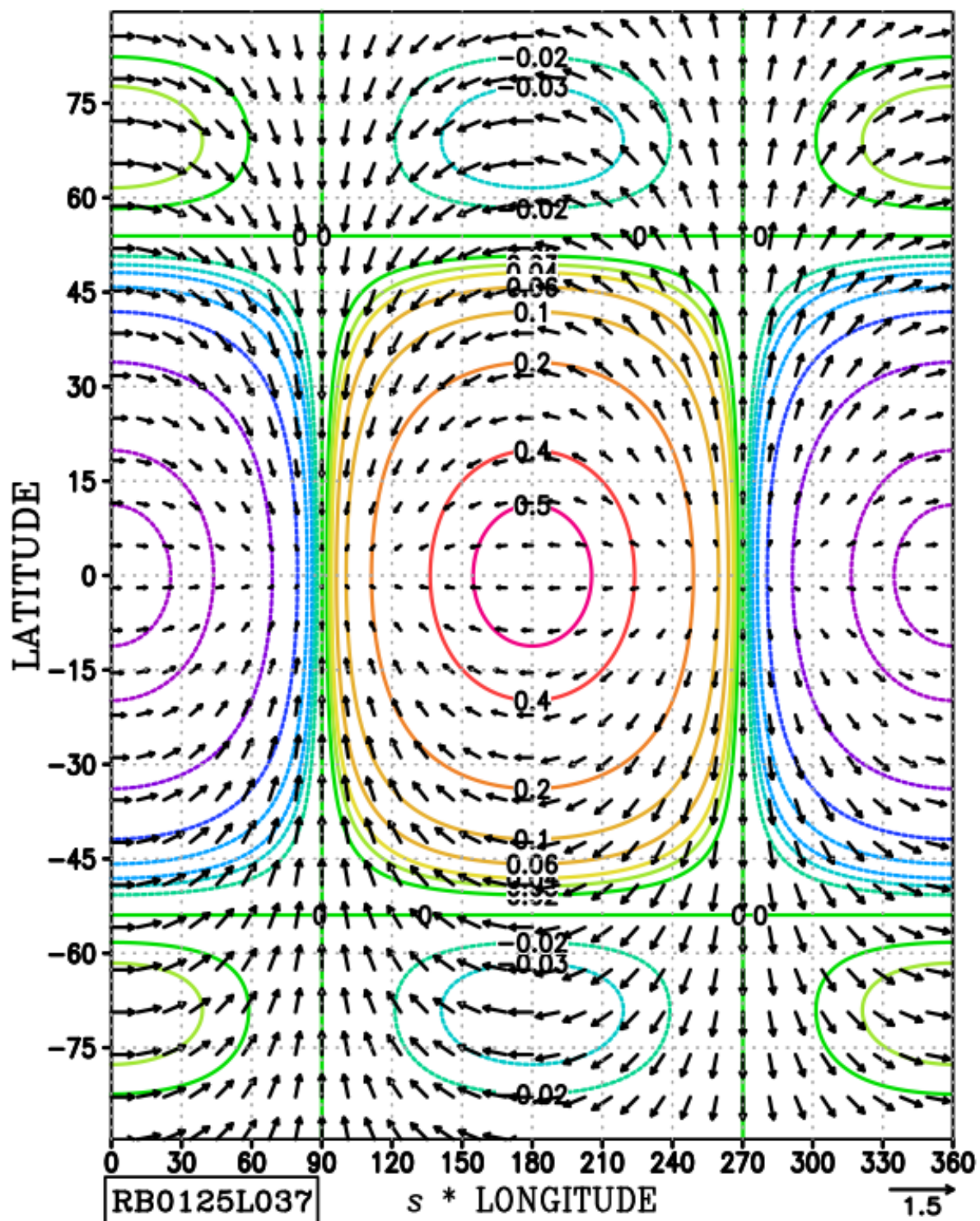


Figura 20 – Onda de gravidade oeste para $\epsilon_n = 9$, $s = 1$, $\ell = 1$ e frequência $\omega = -0,901414$.

Wind and Geopotential Height GRAV WEST ERA 5:
 $E00=9.0$ $H00=9746.3\text{m}$ $s=6$ $l=1$ $\omega=-2.243394$

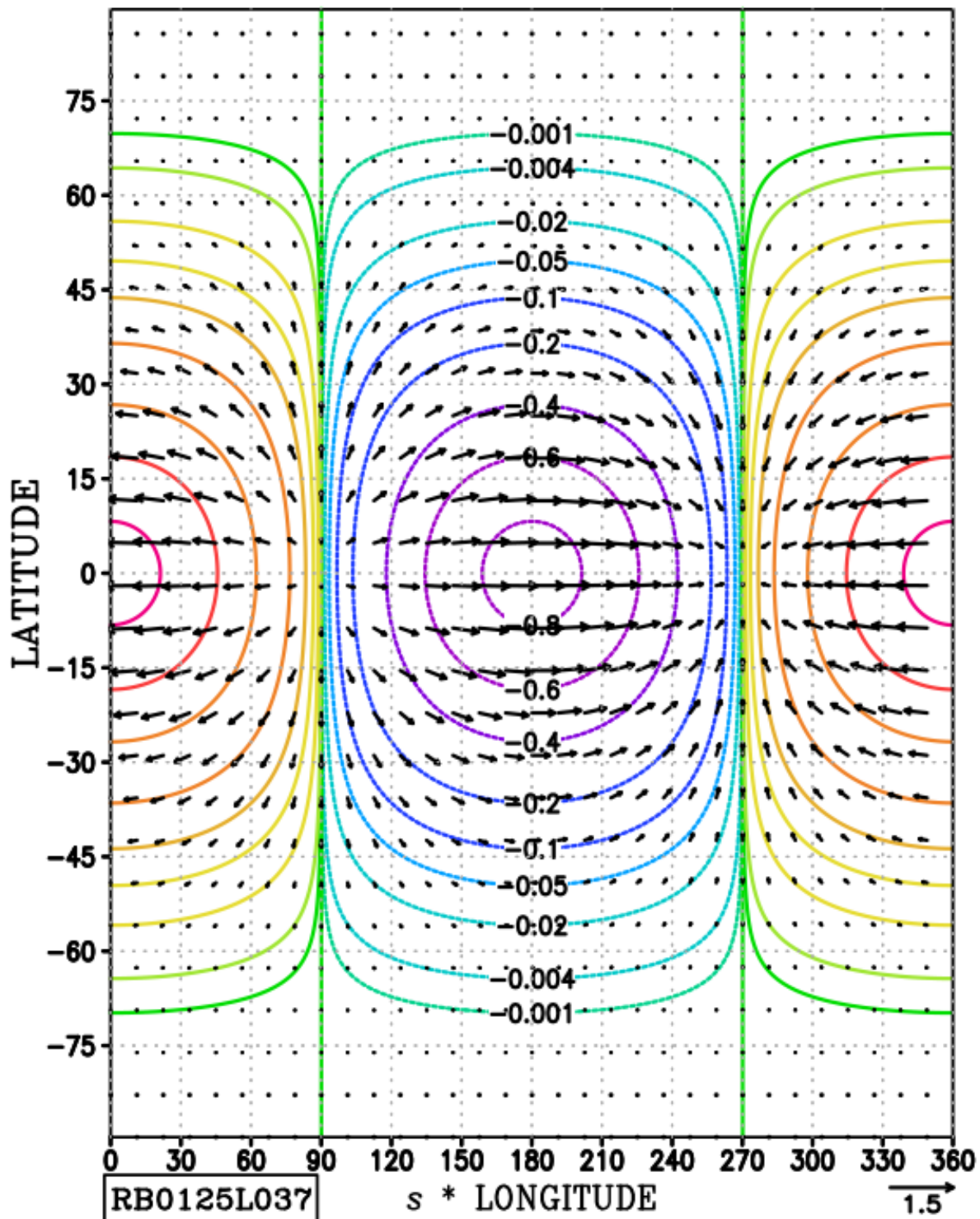


Figura 21 – Onda de gravidade oeste para $\epsilon_n = 9$, $s = 6$, $\ell = 1$ e frequência $\omega = -2,243294$.

As figuras 18, 19 e 20, 21 apresentam modos de gravidade simétricos propagando-se para leste e oeste, respectivamente. A estrutura dos campos da onda de gravidade oeste é semelhante à onda de Kelvin, porém os campos de vento e de geopotencial estão defasados 180° . A zonalidade do campo de vento para as ondas de gravidade para ondas longas (figuras 18 e 20) é mais pronunciada que para ondas curtas (figura 19 e 21). Além disso, não há tendência à geostrofia: o vento escoar para a alta de geopotencial e quando é paralelo às isolinhas de

geopotencial tem sentido contrário ao geostrófico. Então, acelerações locais das componentes zonal e meridional do vento são altas para satisfazer a equação do movimento ageostrófico. Como resultado da ageostrofia, surge uma divergência grande e a direção de propagação é facilmente obtida com sua relação com a tendência local do geopotencial. Pela figura 20, há convergência à oeste da alta central e divergência à sua esquerda. Como a divergência tende a diminuir o geopotencial e a convergência a aumentá-lo, a onda se propaga para oeste. A onda de gravidade leste dada na figura 19 tem características idênticas às citadas para a onda de gravidade oeste, porém a propagação é no sentido contrário, como mostra a divergência em latitudes médias à oeste das altas e a convergência à leste.

Com a diminuição de H_n as características gerais desses modos se mantêm, porém, as configurações são mais confinadas na região equatorial (não mostrado) como ressaltado em Bonatti et al. (1983).

Análise da Continuidade Energética dos Modos de Rossby Não-Zonais e Modos Geostróficos (Hough_Functions/gs)

Uma outra característica importante dos modos horizontais é a continuidade energética dos modos de Rossby não-zonais e os modos geostróficos. A figura 22 mostra a energia cinética zonal (E_{CZ}), a energia cinética meridional (E_{CM}) e a energia potencial disponível (E_{PD}) para $\epsilon_n = 9,0$ ($H_n = 9746,3$ m) e para $\epsilon_n = 382,6$ ($H_n = 230,3$ m), correspondentes ao caso de referência ERA_5, para os modos de Rossby, em função do harmônico zonal (s) e do índice meridional (ℓ). A E_{CM} só tem valor para $s > 0$, dado que para os modos geostróficos E_{CM} é nula.

Fica clara pela figura 22 a continuidade energética entre os modos geostróficos zonais e os não-zonais. Para $s = 0$ e ϵ_n pequeno tem-se E_{CZ} tendendo a 0,5 (figura 22A) e E_{PD} tendendo a zero (figura 22E); para ϵ_n grande E_{CZ} (figura 22B) e E_{PD} (figura 22F) tendem para 0,25. Lembrando que para $s = 0$, E_{CM} é nulo. Tais resultados são esperados pela teoria. Para ϵ_n pequeno (figura 22A) E_{CZ} cresce com ℓ e decresce com s , enquanto para E_{CM} (figura 22C) ocorre o oposto; a E_{PD} (figura 22E) é concentrada em s pequeno e ℓ em torno de 1. A variação de E_{CZ} e E_{CM} é aproximadamente linear no plano s versus ℓ , sendo E_{CZ} mais concentrada em s pequeno e ℓ grande e E_{CM} em s grande e ℓ pequeno. Para ϵ_n grande o caráter de variação de E_{CZ} (figura 22B) e E_{CM} (figura 22D) não muda, em geral, porém não é mais linear e a concentração dos máximos torna-se mais confinada; a E_{PD} (figura 22F) sofre mudanças maiores, ampliando as regiões de valores significantes, tendo uma concentração maior para s pequeno e ℓ em torno de 11.

O conhecimento de tais propriedades é importante quando se estuda dispersão de energia em modelos e partição de energia em dados observados. É interessante realizar estudos com dados observados para verificar a consistência da partição de energia entre modos geostróficos zonais e a sua contrapartida não-zonal.

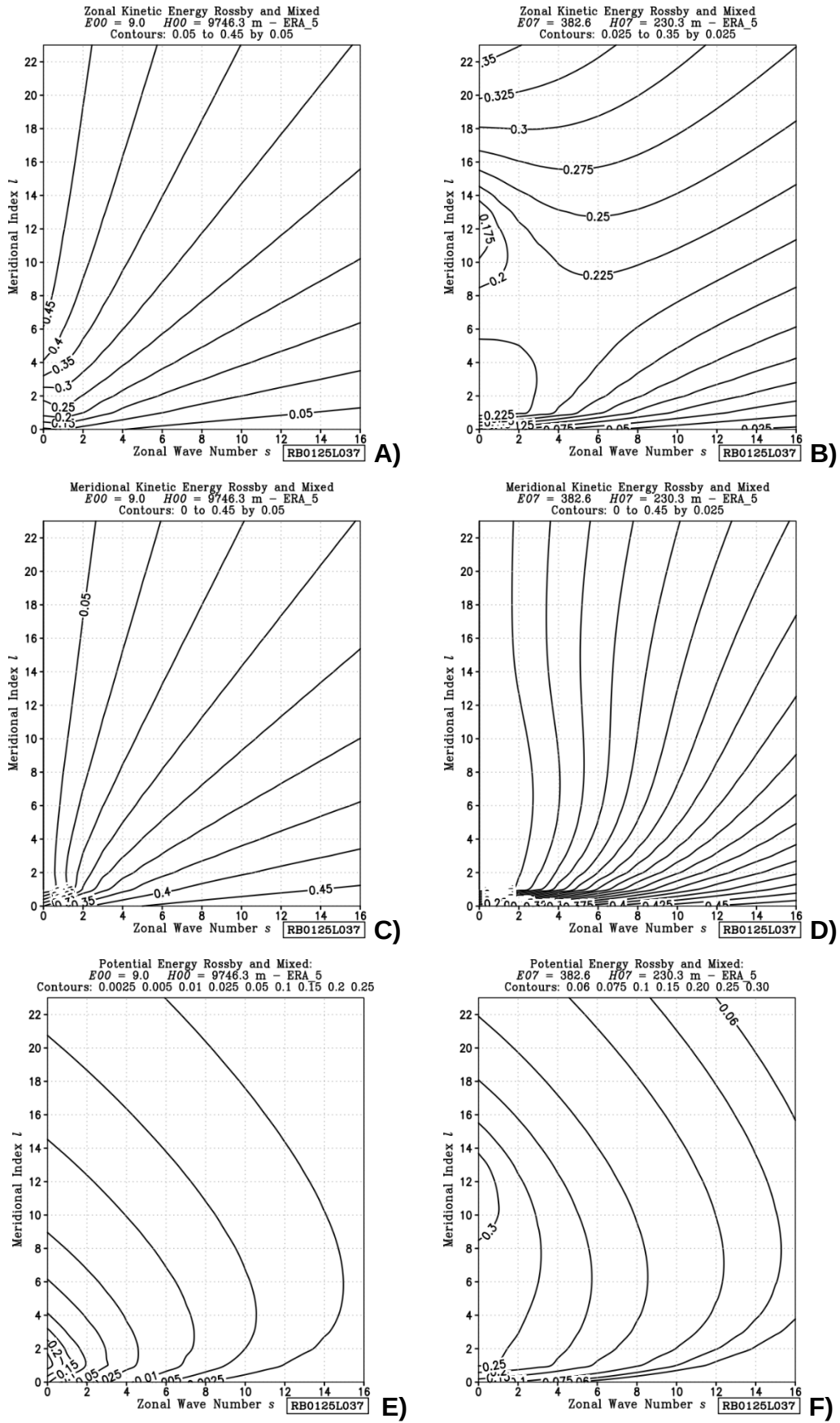


Figura 22 – Energia Cinética Zonal (A, $H_n = 9746,3$ m; B, $H_n = 230,3$ m), Energia Cinética Meridional (C, $H_n = 9746,3$ m; D, $H_n = 230,3$ m) e Energia Potencial Disponível (E, $H_n = 9746,3$ m; F, $H_n = 230,3$ m) para os Modos de Rossby em função do Harmônico Zonal (s) e do Índice Meridional (ℓ).

Velocidade de Grupo e Dispersão de Energia na Esfera (Hough_Functions/gs)

O conceito básico para o entendimento do processo de dispersão de energia é a velocidade de grupo. Em um sistema dispersivo, a velocidade de propagação de energia é diferente da velocidade de fase das ondas: a energia propaga-se com a velocidade de grupo (Lamb, 1952; Rossby, 1945). Essa discussão é baseada em Silva Dias e Schubert (1979).

A velocidade de grupo $C_{G_{r,n}}^{s,\ell}$ na direção oeste - leste é dada por:

$$C_{G_{r,n}}^{s,\ell} = \frac{\partial \omega_{r,n}^{s,\ell}}{\partial s}, \quad (145)$$

para o caso contínuo em s (número de onda zonal), isto é, um domínio infinito na direção zonal, onde $\omega_{r,n}^{s,\ell}$ é a frequência. Considerar-se-á a partir daqui o conceito de velocidade de grupo quando os números de onda zonais permitidos são quantizados pela periodicidade zonal imposta, segundo trabalho feito por Hoskins et al (1977).

Admitem-se duas ondas da forma $\exp[i(s_1\lambda - \omega_{r,n,1}^{s,\ell}t)]$ e $\exp[i(s_2\lambda - \omega_{r,n,2}^{s,\ell}t)]$ que serão designadas por onda I e onda II, respectivamente. Ao se considerar a diferença de fase entre as ondas I e II igual a $2\pi j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), pode-se escrever a seguinte equação que relaciona a longitude λ e o tempo t :

$$\lambda = \frac{2\pi j + (\omega_{r,n,1}^{s,\ell} - \omega_{r,n,2}^{s,\ell})t}{s_1 - s_2}. \quad (146)$$

A equação 146 define as linhas contínuas no plano (λ, t) mostradas na figura 23. Em um ponto (λ_1, t_1) sobre estas linhas, as ondas I e II têm a mesma fase, exceto por um fator 2π . Sem perda de generalidade, admite-se que em $t = 0$ há uma crista de uma das ondas em $x = 0$; assim, as cristas são localizadas em $\lambda_m = 2\pi m/s$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), inicialmente. As cristas de uma onda movem-se no tempo com velocidade de fase $c_{r,n}^{s,\ell} = \omega_{r,n}^{s,\ell}/s$, definindo a família de retas:

$$\lambda = \frac{2\pi m + \omega_{r,n}^{s,\ell}t}{s}. \quad (147)$$

Estas linhas definem a posição das cristas no plano (λ, t) como mostrado na figura 23. (linhas tracejadas para a onda I e tracejadas com pontos para a onda II). A intersecção entre as retas definidas nas equações 146 e 147 estabelecem os pontos no plano (λ, t) onde ambas as ondas se reforçam entre si, isto é, a diferença de fase entre a onda I e a onda II é zero (exceto por um fator 2π) e ambas estão com a crista no ponto de intersecção. Ao se tomar $j = 0$ e $m = 1$, ter-se-ão as fórmulas de Hoskins et al (1977) para a distância e tempo de reforço dos cavados. Os pontos de intersecção para j e m arbitrários tem coordenadas:

$$\lambda_{1,2}(j, m) = 2\pi \left[\frac{(j-m) \omega_{r,n,1}^{s,\ell} + m \omega_{r,n,2}^{s,\ell}}{s_1 \omega_{r,n,2}^{s,\ell} - s_2 \omega_{r,n,1}^{s,\ell}} \right] \quad (148)$$

e

$$t_{1,2}(j, m) = 2\pi \left[\frac{(j-m) s_1 + m s_2}{s_1 \omega_{r,n,2}^{s,\ell} - s_2 \omega_{r,n,1}^{s,\ell}} \right]. \quad (149)$$

Maiores detalhes podem ser encontrados em Bonatti (2020). Pode-se agora interpretar a figura 23 mais cuidadosamente. As linhas de diferenças de fase são indexadas por $j = -2, -1, 0$, de acordo com a equação 146 e a inclinação $(\omega_1 - \omega_2)/(s_1 - s_2)$ é a correspondente à onda mista Rossby-gravidade para a esfera, com $\epsilon_n = 4\Omega^2 a^2 / gH_n = 9$ e $H_n \cong 9,75 \text{ km}$, (onde Ω é a velocidade de rotação da Terra, a seu raio médio, g a aceleração da gravidade e H_n a altura equivalente) e $s_1 = 3$ (onda I), $\omega_{r,n,1}^{s,\ell} = -0,23977$ e $s_2 = 1$, $\omega_{r,n,2}^{s,\ell} = -0,41967$ (onda II), valores do caso de referência ERA_5. Essas ondas foram escolhidas, pois resultam em um gráfico com linhas de fase bem distribuídas.

As linhas indexadas por $m = -1, 0, 1, 2$ são as definidas pela equação 147 para a onda I e as indexadas por $m = 0, 1, 2, 3$ correspondem ao equivalente para a onda II. O trem de pontos de reforço propaga-se no tempo ao longo das linhas de diferença de fase constante (linhas contínuas) com velocidade $C_{Gr,n}^{s,\ell}$ dada por:

$$C_{Gr,n}^{s,\ell} = \frac{\omega_{r,n,1}^{s,\ell} - \omega_{r,n,2}^{s,\ell}}{s_1 - s_2}. \quad (150)$$

No limite, quando s_2 tende para s_1 , tem-se a definição tradicional de velocidade de grupo dada na equação 145. Entretanto, quando se impõe periodicidade na direção zonal, a equação 150 é a definição apropriada para a velocidade de propagação de energia associada às ondas I e II (Hoskins et al, 1977), pois os números de onda são discretos ($s = 0, 1, 2, \dots$).

A figura 23 mostra que em $t = 0$ tem-se um ponto de reforço em $\lambda = 0$. Ao se seguir este ponto ao longo da linha de diferença de fase constante ocorrerão novos reforços em intervalos de tempo $\Delta t_{1,2}$ dados por:

$$\Delta t_{1,2} = 2\pi \left| \frac{s_1 - s_2}{s_1 \omega_{r,n,2}^{s,\ell} - s_2 \omega_{r,n,1}^{s,\ell}} \right| \quad (151)$$

e as sucessivas distâncias entre esses pontos de reforço $\Delta \lambda_{1,2}$ serão:

$$\Delta \lambda_{1,2} = 2\pi \left| \frac{\omega_{r,n,1}^{s,\ell} - \omega_{r,n,2}^{s,\ell}}{s_1 \omega_{r,n,2}^{s,\ell} - s_2 \omega_{r,n,1}^{s,\ell}} \right|, \quad (152)$$

Conforme indicado na figura 23, podem-se obter os seguintes valores para o intervalo de tempo $\Delta t_{1,2} = 12,33 = 23,49$ horas e para as distâncias $\Delta \lambda_{1,2} = 1,09 \text{ rd} = 62,45^\circ$.

A direção de propagação do trem de reforço depende da inclinação da linha de diferença de fase constante definida na equação 152. Para as duas ondas mostradas na figura 23, o trem de pontos de reforço move-se para leste com $C_{Gr,n}^{s,\ell} = 0,08995 = 64,8^\circ/\text{dia}$, desde que a inclinação é positiva. Um valor negativo para $C_{Gr,n}^{s,\ell}$ implica em propagação de energia para oeste.

As ondas mostradas na figura 6 representam modos internos ($\epsilon_n = 9$). As figuras de 24 a 26 mostram a velocidade de grupo em função do número de onda para diferentes modos e alturas equivalentes.

O trem de reforço associado às ondas de Rossby com índice meridional baixo propagam-se para oeste na região do espectro das ondas longas e para este para as ondas mais curtas. Para os modos meridionais mais altos, o intervalo do espectro, no qual há propagação para oeste, é muito mais amplo, mas a velocidade de grupo é menor. A energia associada com as ondas mais curtas tende a se propagar como uma configuração rígida, desde que as frequências estão associadas com linhas quase retas (figuras 24 a 26).

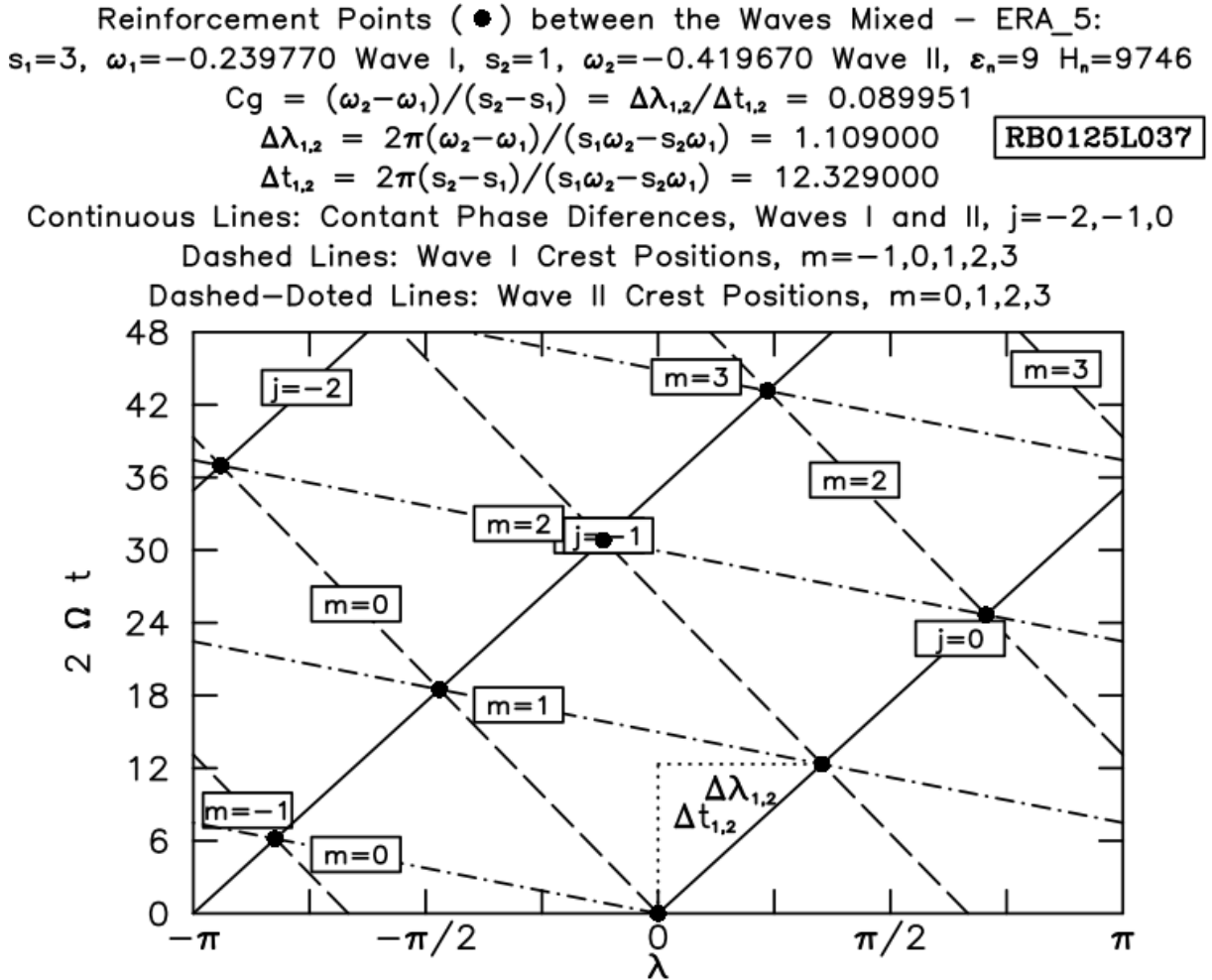


Figura 23 – Pontos de reforço entre ondas mistas Rossby-gravidade I e II.

Modos meridionais mais altos para $\epsilon_n = 9$ são quase não dispersivos incluindo as ondas longas, tanto para ondas de gravidade para oeste, como para ondas de gravidade para leste. O reforço para ondas de gravidade ocorre tipicamente em menos de um dia (exceto para modos meridionais menores) e para ondas de gravidade oeste (ondas de gravidade leste). Se a condição inicial contém mais energia nestes modos, a dispersão devido aos modos rotacionais é inibida pelo caráter dispersivo rápido das ondas de gravidade, desde que estas se propagam ao redor do globo em uma escala de tempo menor que o tempo de reforço das ondas de Rossby.

Outro ponto a ser considerado se refere à assimetria leste-oeste pelas diferenças nas características dispersivas dos modos de ondas de gravidade leste e oeste. Exceto para ℓ grande, $\Delta\lambda_{1,2}$, $\Delta t_{1,2}$ e $C_{G1,2}$ podem diferir significativamente e, para energia inicial em ℓ

pequeno, a assimetria da frente das ondas pode ser bem marcante (Silva Dias e Schubert, 1979). Veja as figuras de 24 a 26 correspondentes para o caso da velocidade de grupo. Erros nas estimativas de $\Delta \lambda_{1,2}$ para os modos de Rossby são provavelmente muito grandes se os números de onda zonal s_1 e s_2 são localizados cada um de um lado do máximo da curva de frequência. A velocidade de grupo torna-se desprezível e os pontos de reforço permanecem quase estacionários, ocorrendo em intervalos de tempo dados por $\Delta t_{1,2}$. A região do espectro para a qual a velocidade de grupo troca de sinal é função de ℓ . Então se a energia inicial está em modos meridionais de alta ordem (ℓ grande), a perturbação estacionária somente aparecerá se a máxima energia está em altos números de onda zonal (s grande, correspondendo a ondas curtas).

O modelo barotrópico não divergente estudado por Hoskins et al (1977) tem boa resposta com respeito à dispersão de energia entre ondas curtas ($s \geq 7$). Entretanto, para ondas longas, e especificamente para $s \leq 3$, a dispersão é drasticamente afetada pela suposição de não-divergência. No modelo não-divergente, a velocidade de grupo entre ondas ultralongas, para o modo $\ell = 1$, é positiva (tabela 1 de Hoskins et al, 1977); enquanto para um modelo divergente o trem de reforços move-se para leste ($C_{G1,2} = -13^\circ/\text{dia}$, para $\ell = 1$, $1 \leq s \leq 3$). Para as ondas nas quais $3 < s < 7$, a velocidade de grupo para leste imposta pelo modelo divergente é cerca de 30% menor que para o modelo de previsão não-divergente (Silva Dias e Schubert, 1979).

A excessiva velocidade da onda para oeste das ondas rotacionais ultralongas é discutida por Phillips (1963). Para as ondas ultralongas, a magnitude da divergência horizontal não é desprezível quando comparada com a componente vertical da vorticidade (Burger, 1958) e, então, nenhum modelo com a suposição de divergência pequena ou nula é apropriado para descrever as características dessas ondas.

A seguir são apresentadas as figuras 24, 25 e 26 da velocidade de grupo em função do número de onda para os modos horizontais com alturas equivalentes representantes do modo externo ($H_n = 9.746,3 \text{ m}$) e do modo interno baroclínico com H_n mais próximo de 250 m ($H_n = 230,3 \text{ m}$) correspondentes ao caso de referência ERA_5.

Note que nas figuras 26A e 26B para as ondas de Rossby e Mista Rossby-gravidade a velocidade de grupo tende a zero. Nas figuras 25 e 26 para as ondas de gravidade inercial a velocidade de grupo tende, em módulo, para $\sqrt{gH_n}$ na forma dimensional ou $\epsilon_n^{-1/2}$ na forma adimensional; nesses gráficos são apresentados os valores adimensionais, então, nas figuras 25A e 26A o valor adimensional, em módulo, é 0,33333 (309,158 m/s) e nas figuras 25A e 26B é, em módulo, 0,05097 (47,523 m/s).

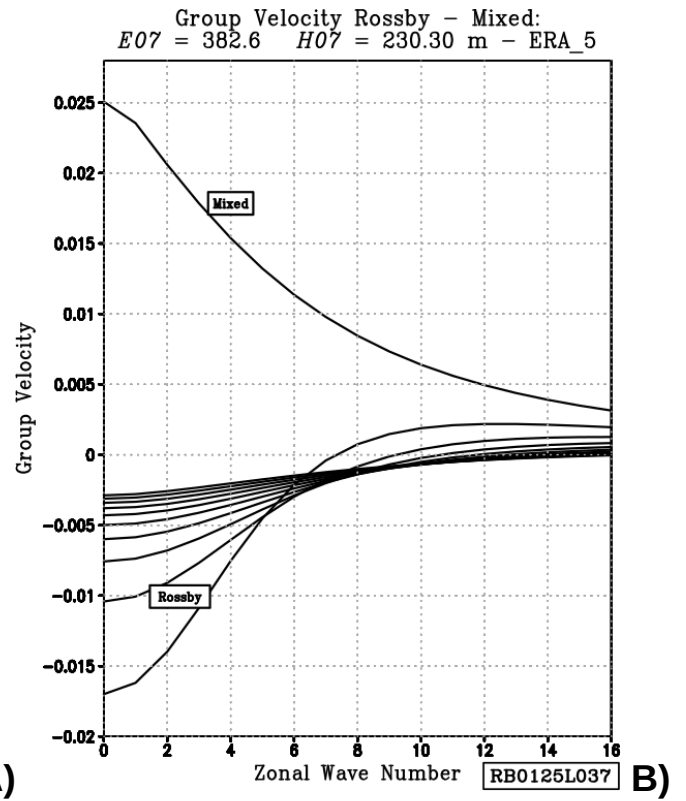
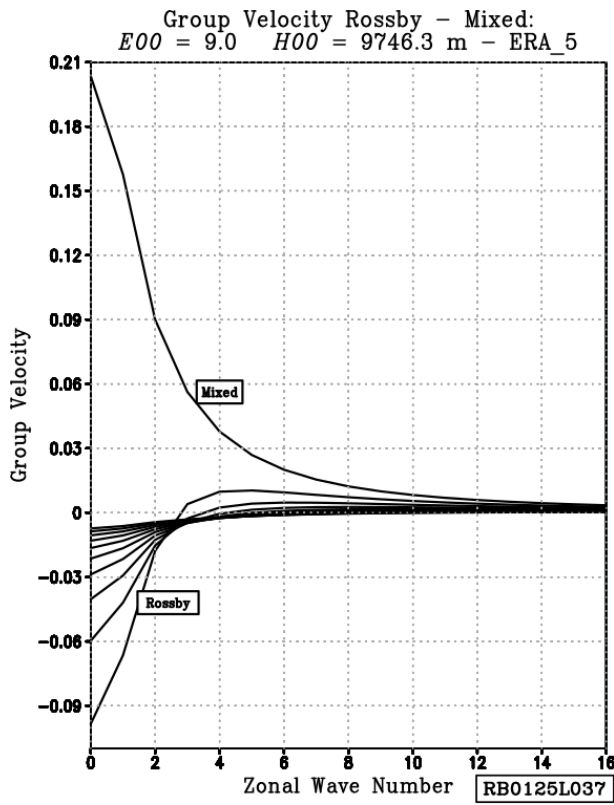


Figura 24 – Velocidade de grupo das ondas de Rossby e Mista Rossby-gravidade para $H_n = 9.746,3$ m (A) e $H_n = 230,3$ m (B).

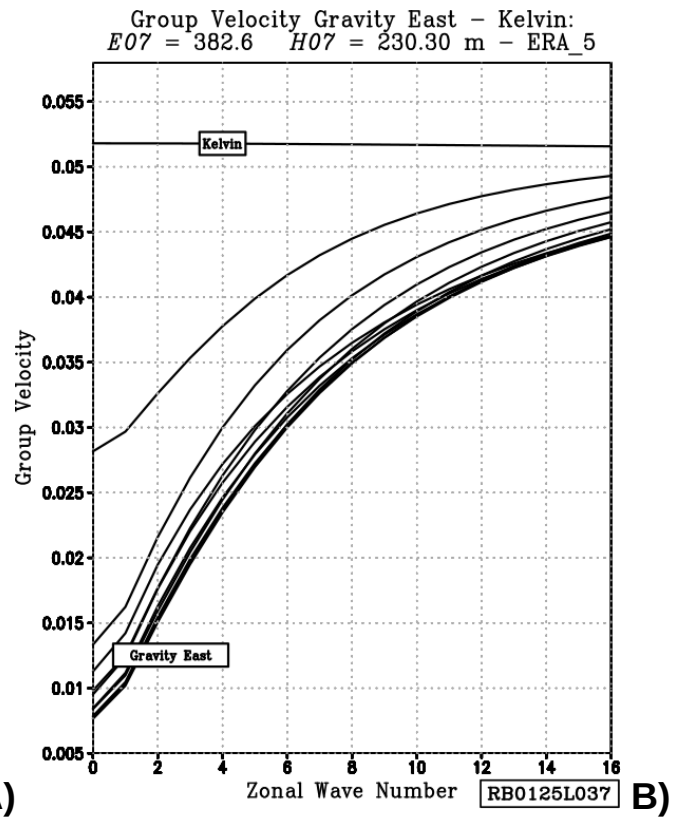
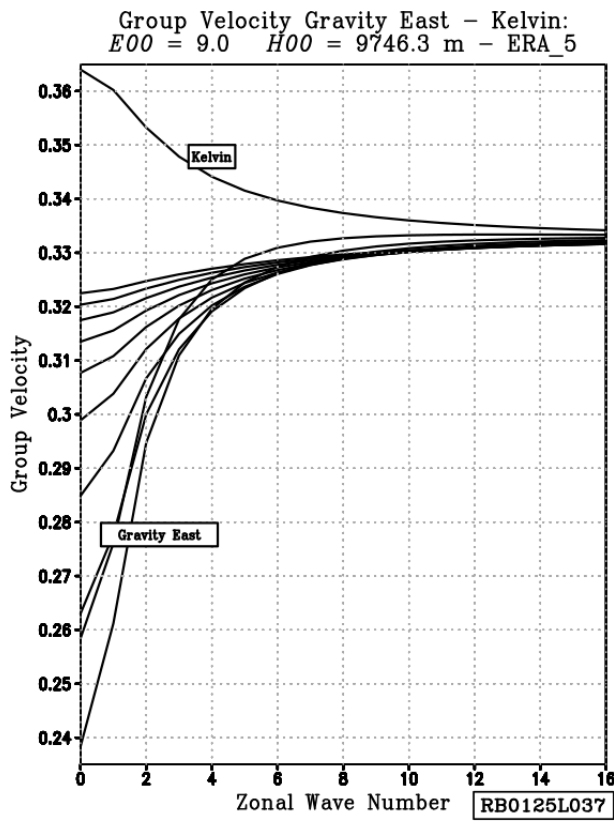
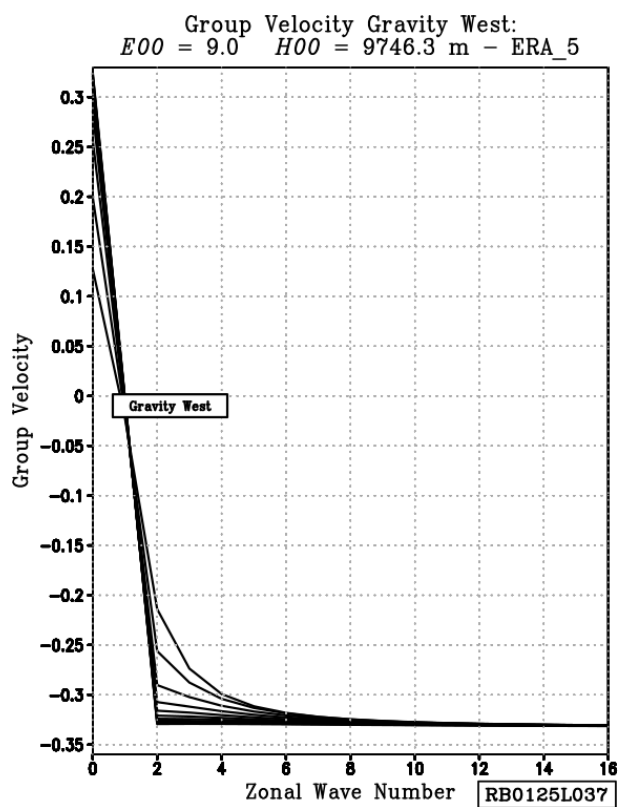
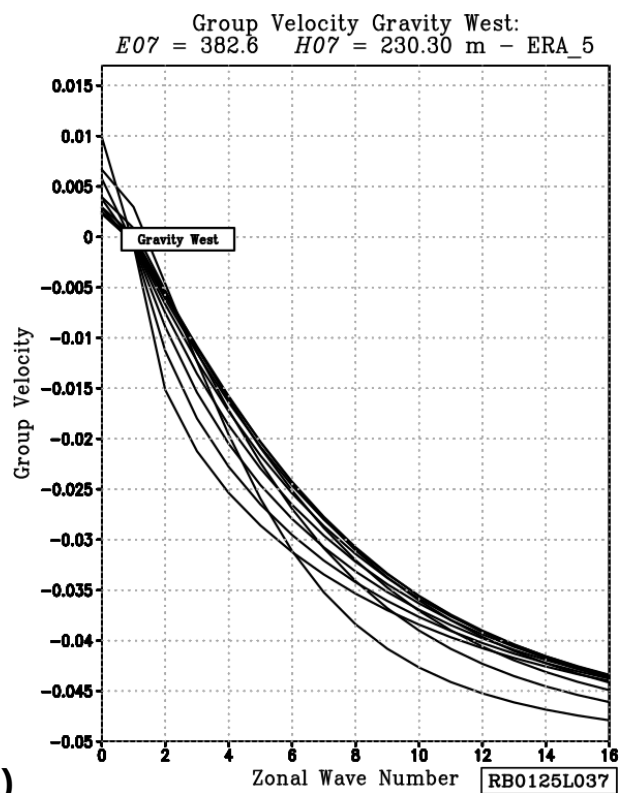


Figura 25 – Velocidade de grupo das ondas de gravidade oeste e Kelvin para $H_n = 9.746,3$ m (A) e $H_n = 230,3$ m (B).



A)



B)

Figura 26 – Velocidade de grupo das ondas de gravidade oeste para $H_n = 9.746,3$ m (A) e $H_n = 230,3$ m (B).

Referências Bibliográficas

- Ambacher, M. R.; Waite, M. L.; 2020: Normal Mode Spectra of Idealized Baroclinic Waves. **Journal of the Atmospheric Sciences**, 77(3): 813-833. DOI: 10.1175/JAS-D-19-0146.1
- Andrade, C.R., 1994: **Análise das trocas de energia entre modos verticais e horizontais em resposta à fontes tropicais de calor de grande escala**. São José dos Campos. 366p. (INPE-5681-TDI/567). Dissertação. (Mestrado em Meteorologia) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.
- Atmosfera Padrão dos EUA, (USSA), 1976: U.S. Standard Atmosphere, 1976. NOAA, NASA, USAF, Washington, D.C., October 1976. Available at (25 February 2025): https://www.ngdc.noaa.gov/stp/space-weather/online-publications/miscellaneous/us-standard-atmosphere-1976/us-standard-atmosphere_st76-1562_noaa.pdf
- Bonatti, J.P.; Silva Dias, P.L., 1983: **Um modelo espectral barotrópico global com iniciação por modos normais**. São José dos Campos, SP, 17pp, (INPE-2674-RPE/428), Relatório Técnico – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE.
- Bonatti, J. P.; Silva Dias P. L., 2006: **Modal energetic partition and interaction among vertical and horizontal modes for the Catarina phenomena**. Proceedings of 8th International Conference on Southern Hemisphere Meteorology and Oceanography, Foz do Iguaçu, PR, 24 a 28 de Abril de 2006.
- Bonatti, J. P., 2020: Ondas na Espera, Decomposição em Funções Modos Normais e Energética Modal: Partição de Energia e Interação entre Modos. Notas de Aula de Meteorologia Dinâmica.
- Bonatti, J.P.; Silva Dias, P.L., 1991: Further studies on spherical zonal geostrophic modes. In: Conference on Weather Numerical Predictions, 9., Denver, CO, USA, Oct.14-18, 1991. Proceedings: p. 157-160.
- Bonatti, J.P.; Silva Dias, P.L.; Moura, A.D., 1983: **Funções de Hough: teoria e utilização**. São José dos Campos, SP, 271 pp, (INPE-2697-RPE/429). Relatório Técnico – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE.
- Bonatti, J. P.; Silva Dias P. L.; Raupp, C.F.M., 2008: **Evidência observacional de tripleto ressonante: estudo de caso**. XV Congresso Brasileiro de Meteorologia, São Paulo, SP, 24 a 29 de agosto de 2008.
- Borges Mendonça, R.W., 2005: **Estudo das trocas horizontais e verticais de energia durante episódios de ZCAS: influência da resolução das análises e dos modelos e da parametrização de convecção**. São José dos Campos, SP, 202p. (INPE-14213-TDI/1114). Tese (Doutorado em Meteorologia) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE.
- Borges Mendonça, R.W.; Bonatti, J.P., 2008: Estudo da Energética Modal para Episódios de ZCAS. Parte I: Análise Observacional. **Revista Brasileira de Meteorologia**, 23(4): 360-380.
- Burger, A., 1958: Scale considerations of planetary motions of the atmosphere. **Tellus**, 10(2):195-205.
- Daley, R.; 1991: **Atmospheric Data Analysis**. Cambridge University Press, 457 pp.

- Eliassen, E; Machenhauer, B.; Rasmussem, E., 1970: **On a numerical method for integration of hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields.** Institute of Theoretical Meteorology, University of Copenhagen, 35 pp (Report n.o 2).
- Fulton, S.R.; Schubert, W.H., 1980: **Geostrophic adjustment in a stratified atmosphere.** Atmospheric Science Paper nº 326, Department of Atmospheric Science, Colorado State University, Fort Collins, CO, 80523, 97 pp.
- Holl, P., 1970: **The completeness of the orthogonal system of the Hough functions.** Translated by Bernhard Haurwitz. Fort Collins, CO. Colorado State University, Mar. 1979. (Translated from Nachrichten der Akademik de Wissenschaften in Göttingen II. Mathematisch Physikalische Klasse, Jahrgang, 1970, n.o 7, 159-168.
- Hoskins, B.J.; Simmons, A.J.; Andrews, D.G., 1977: Energy dispersion in a barotropic atmosphere. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, 103(438):553-567.
- Kaplan, P., 1994: NCEP, Personal communication.
- Kasahara, A., 1976: Normal modes of ultralong waves in atmosphere. **Monthly Weather Review**, 104(6):669-690.
- Kasahara, A., 1978: Further studies on a spectral model of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expansion. **Journal of the Atmospheric Sciences**, 35(11): 2043-2051.
- Kasahara, A.; Puri, K., 1981: Spectral representation of three-dimensional global data by expansion in normal mode functions. **Monthly Weather Review**, 109(1): 37-51.
- Ko, S.D.; Tribbia, J.J.; Boyd, J.P, 1989: Energetics analysis of a multilevel global spectral model. Part I: balanced energy and transient energy. **Monthly Weather Review**, 117(9), 1941-1953.
- Lamb, H., 1952: **Hydrodynamics**. 6 ed., New York, Dover.
- Marques, C. A. E.; Marta-Almeida, M.; Castanheira, J. M.; 2020: Three-dimensional normal mode functions: open-access tools for their computation in isobaric coordinates (p-3DNMF.v1). **Geoscientific Model Development**, 13, 2763–2781. DOI: 10.5194/gmd-13-2763-2020.
- NMC Development Division Staff., 1988: Research version of the medium range forecast model. **NMC Documentation Series**, n. 1, Washington D.C.
- Orszag, S.A., 1970: Transform method of the calculation of vector coupled sums: application to spectral form of the vorticity equation. **Journal of the Atmospheric Sciences**, 27(6): 890-895.
- Phillips, N.A., 1963: Geostrophic motion. **Reviews of Geophysics**, 1(2):123-176.
- Ricardo Bonatti, G. **Estudos observacionais, de simulação numérica e de partição e interação de energia de nuvem vírgula invertida sobre a América do Sul.** 2004. 276p. São José dos Campos, SP, 276p. (INPE-13065-TDI/1024) Dissertação (Mestrado em Meteorologia) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE.

- Rossby, C.G., 1945: On the propagation of frequencies and energy in certain types of oceanic and atmospheric waves. **Journal of Meteorology**, 2(4):187-204.
- Shigehisa, Y., 1983: Normal modes of the shallow water equations for zonal wavenumber zero. **Journal of the Meteorological Society of Japan**, 61: 479-493.
- Silva Dias, P.L.; Bonatti, J.P.; 1985: A preliminary study of the observed vertical mode structure of the summer circulation over tropical South America. **Tellus**, 37(2): 185-195.
- Silva Dias, P.L.; Schubert, W.H., 1979: **The dynamics of equatorial mass-flow adjustment**. Department of Atmospheric Science, Colorado State University, Fort Collins, CO. 203 pp. (Atmospheric Science, 312)
- Silva Dias, P.L.; Bonatti, J.P.; 1986: Vertical mode decomposition and model resolution. **Tellus**, 38A: 205-214.
- Staniforth, A.; Beland, M.; Côté, J.; 1985: An analysis of the vertical structure equation in sigma coordinates. **Atmosphere-Ocean**, 23(4): 323-358.

Apêndice A: Análise Analítica das Interações Não-Lineares entre Modos Verticais

Considerando um modelo global, as interações entre os modos se dão através dos termos não-lineares das equações. Para uma análise analítica dessas interações entre modos verticais é necessário o cálculo analítico das estruturas verticais, o que será considerado em primeiro lugar; na sequência serão analisados os termos não-lineares das equações. Fulton e Schubert (1980) apresentam uma solução analítica para as estruturas verticais considerando a frequência de Brunt Väisälä constante. Para fazer uso dessa consideração fica mais prático utilizar a coordenada $\sigma = p/p_s$ como coordenada vertical.

O parâmetro de estabilidade estática em coordenadas de pressão (equação 7) é:

$$\tilde{\Gamma}(p) = \frac{R_d}{p g} \left(\frac{R_d}{p c_p} \tilde{T} - \frac{d\tilde{T}}{dp} \right). \quad (\text{A.1})$$

Ao se multiplicar a equação 5 por p_s^2 encontra-se:

$$p_s^2 \tilde{\Gamma}(\sigma) = \frac{R_d}{\sigma g} \left(\frac{R_d}{\sigma c_p} \tilde{T} - \frac{d\tilde{T}}{d\sigma} \right) = \frac{R_d \bar{\Gamma}}{\sigma g} = \frac{R_d \bar{S}}{\sigma^2 g}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\bar{\Gamma}$ é o parâmetro de estabilidade em coordenadas sigma e pode ser escrito em termos de $\bar{S}$, que é proporcional à frequência de Brunt Väisälä, como $\bar{\Gamma} = \bar{S}/\sigma$. $\bar{S}$ pode ser considerado constante em coordenadas verticais $\xi = -\ln(\sigma) = \ln(p_s/p)$ e essa aproximação é bastante realista, principalmente na troposfera tropical, e permite o cálculo analítico dos autovalores e autovetores da estrutura vertical (Haas, 1993).

A equação da estrutura vertical em coordenadas de pressão (equação 17) é

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\tilde{\Gamma}} \frac{d\Psi_n}{dp} \right) + \frac{1}{H_n} \Psi_n = 0, \quad (\text{A.3})$$

e substituindo a equação A.2 em A.3, e usando a definição de $\sigma = p/p_s$, obtém-se a equação da estrutura vertical em coordenadas sigma:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\sigma g}{R_d \bar{\Gamma}} \frac{d\Psi_n}{d\sigma} \right) + \frac{1}{H_n} \Psi_n = 0. \quad (\text{A.4})$$

Para obter a solução analítica escreve-se a equação B.4 em coordenadas verticais ξ da seguinte forma:

$$\frac{d^2 Z_n}{d\xi^2} + \left(\frac{R_d \bar{S}}{g H_n} - \frac{1}{4} \right) Z_n = 0, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\Psi_n(\xi) = Z_n(\xi) \exp(\xi/2), \quad (\text{A.6})$$

E as condições de contorno dadas nas equações 18 e 19 tornam-se:

$$\frac{dZ_n}{d\xi} = -S_S Z_n, \quad \xi = 0, \quad (A.7)$$

e

$$\frac{dZ_n}{d\xi} = -S_T Z_n, \quad \xi = \xi_T, \quad (A.8)$$

onde

$$S_S = \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{S}}{\bar{T}_S} \right) \text{ e } S_T = \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{S}}{\bar{T}_T} \right). \quad (A.9)$$

Pode ser mostrado que a equação B.6 com as condições de contorno A.7 e A.8 formam um problema de Sturm-Liouville (Bonatti, 2020). Normalizando Z_n pode-se escrever uma relação de ortonormalidade para a estrutura vertical tal que:

$$\int_0^{\xi_T} Z_m(\xi) Z_n(\xi) d\xi = \int_{\sigma_T}^1 \Psi_m(\sigma) \Psi_n(\sigma) d\sigma = \delta_{mn}, \quad (A.10)$$

onde $\delta_{mn} = 0$, $n = m$ e $\delta_{mn} = 1$, $n \neq m$, é o delta de Kronecker, e pela definição de ξ pode-se escrever que $d\xi = -\exp \xi d\sigma$ e quando $\xi = 0 \Rightarrow \sigma = 1$ e $\xi = \xi_T \Rightarrow \sigma = \sigma_T$, com $\sigma_T = \ln(p_T/p_S)$ e da equação A.6 tem-se que $Z_n = \exp(-\xi/2) \Psi_n$.

A condição de ortonormalidade A.10 está ligada às considerações energéticas, já que permite a partição de energia entre modos normais verticais com diferentes alturas equivalentes (Kasahara e Puri, 1981) e a análise energética pode ser feita para cada um deles separadamente. E devido à igualdade dada na equação A.10 a condição de Sturm-Liouville pode ser estendida para a função $\Psi_n(\sigma)$, ou seja, $\Psi_n(\sigma)$ também forma uma base completa e pode representar a estrutura vertical dos campos.

A profundidade equivalente H_n e a estrutura vertical $Z_n(\xi)$ serão obtidas como autovalor e autovetor do sistema formado pelas equações A.6, A.7 e A.8. Os valores numéricos usados para os parâmetros das equações A.6, A.7 e A.8, sugeridos por Fulton e Schubert (1980), serão: $\bar{S} = 36 \text{ K}$, $\bar{T}_S = 287 \text{ K}$, $C_p = 1005 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $R_d = 287,05 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $g = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$, $p_S = 1000 \text{ hPa}$, $p_T = 50 \text{ hPa}$, $\xi_T = 2,996$ e $\bar{T}_\infty = \bar{S}/\kappa = 126,04 \text{ K}$ com $\kappa = R_d/C_p$. O valor de $\bar{T}_T$ é obtido resolvendo-se a equação A.2 em sigma para $\bar{S}$ constante, obtendo-se o perfil da temperatura do estado básico de forma analítica e calculando $\bar{T}_T = \bar{T}(\xi_T) = 194,45 \text{ K}$. Pode-se também, determinar a altura geopotencial básica considerando-se o estado básico hidrostático (veja as equações em Bonatti, 2020). Note que para esses cálculos p_S é considerado constante.

A equação A.6 é do segundo grau em ξ e tem coeficiente $R_d \bar{S}/g H_n - 1/4$ constante; logo, sua solução pode ser de três tipos: linear, se o coeficiente for nulo, exponencial se o coeficiente for negativo e senoidal se o coeficiente for positivo. Os três casos serão analisados a seguir.

- a)** Solução linear, com coeficiente de (A.5) nulo, então $H_0 = 4R_d \bar{S}/g = 4.215,02 \text{ m}$, usando os valores dos parâmetros citados anteriormente. A equação A.5 torna-se:

$$\frac{d^2 Z_0}{d\xi^2} = 0. \quad (A.11)$$

A solução é única com estrutura vertical do tipo:

$$Z_0 = A_0 + B_0 \xi. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo A.12 nas condições de contorno A.7 e A.8, obtém-se para $\xi = 0$ e $\xi = \xi_T$, respectivamente:

$$\begin{cases} S_S A_0 + B_0 = 0 \\ S_T A_0 + (1 + S_T \xi_T) B_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Para solução não-trivial o determinante deve ser nulo e resolvendo para ξ_T encontra-se:

$$\xi_T = \frac{1}{S_S} - \frac{1}{S_T} = \frac{4\bar{S}(\bar{T}_T - \bar{T}_S)}{(\bar{T}_S - 2\bar{S})(\bar{T}_T - 2\bar{S})}. \quad (\text{A.14})$$

Como o valor da temperatura no topo é menor que a temperatura de superfície e qualquer desses valores é maior que o dobro da estabilidade estática do estado básico, tem-se que $\xi_T < 0$, o que não se constitui em um resultado físico possível. Logo, isto implica que $H_0 \neq 4R_d \bar{S}/g$.

- b)** Solução exponencial, com coeficiente de A.5 negativo, então $H_0 > 4R_d \bar{S}/g$. A equação torna-se:

$$\frac{d^2 Z_0}{d\xi^2} - \zeta_0^2 Z_0 = 0, \quad (\text{A.15})$$

onde $\zeta_0^2 = 1/4 - R_d \bar{S}/gH_0$ e a estrutura vertical é do tipo:

$$Z_0 = A_0 \cosh(\zeta_0 \xi) + B_0 \sinh(\zeta_0 \xi). \quad (\text{A.16})$$

Substituindo A.16 nas condições de contorno A.7 e A.8, obtém-se para $\xi = 0$ e $\xi = \xi_T$, respectivamente:

$$B_0 = (-S_S/\zeta_0)A_0, \quad (\text{A.17})$$

e

$$\tanh(\zeta_0 \xi_T) = \frac{(S_S - S_T)\zeta_0}{\zeta_0^2 - S_S S_T}, \quad (\text{A.18})$$

A equação A.18 dá solução única para ζ_0 e, portanto, para H_0 e $Z_0(\xi)$. Como a equação A.18 é transcendental com solução única, o método iterativo recomendado para obtê-la é o de Newton-Rapson. Esta solução é chamada de *modo externo ou barotrópico* (equivalente e divergente), pois representa uma oscilação da interface solo-atmosfera, ou seja, da atmosfera como um todo, sem propagação vertical.

Note que se $\xi_T \rightarrow \infty$, a tangente hiperbólica tende a 1 em A.18, e tem-se uma equação do segundo grau em ζ_0 , porém como A.18 tem solução única, só uma solução é válida e seria $\zeta_0 = S_S$, que resulta em $H_0 = 9.605,65$ m, utilizando $T_T = \bar{S}/\kappa = 126,04$ K, que é o menor valor possível de se obter para H_0 utilizando essa metodologia. A solução descartada seria $\zeta_0 = S_T$ que daria um valor para H_0 de 5.164,41, que apesar de maior que $4R_d \bar{S}/g$ é muito baixo e na

solução de A.18 por Newton-Rapson não se consegue obter essa solução, apenas a anterior é obtida.

A função estrutura vertical para o modo externo fica dada por:

$$Z_0 = A_0 [\cosh(\zeta_0 \xi) - (S_S/\zeta_0) \sinh(\zeta_0 \xi)]. \quad (\text{A.19})$$

Para que a integral vertical dada na condição de ortonormalidade A.10 seja 1, isto é,

$$\int_0^{\xi_T} Z_0^2 d\xi = 1. \quad (\text{A.20})$$

A constante A_0 é obtida substituindo A.19 em A.20 e chegando a:

$$A_0 = \left\{ \left[\frac{\xi_T}{2} + \frac{\sinh(2\zeta_0 \xi_T)}{4\zeta_0} \right] - S_S \left[\frac{\cosh(2\zeta_0 \xi_T) - 1}{2\zeta_0^2} \right] + S_S^2 \left[\frac{\sinh(2\zeta_0 \xi_T)/\zeta_0 - 2\xi_T}{4\zeta_0^2} \right] \right\}^{-1/2} \quad (\text{A.21})$$

- c) Solução senoidal, com coeficiente de (A.5) positivo, então $H_n < 4R_d \bar{S}/g$. A equação torna-se:

$$\frac{d^2 Z_n}{d\xi^2} + \zeta_n^2 Z_n = 0, \quad (\text{A.22})$$

onde $\zeta_n^2 = R_d \bar{S}/gH_n - 1/4$ e a estrutura vertical é do tipo:

$$Z_n = A_n \cos(\zeta_n \xi) + B_n \sin(\zeta_n \xi). \quad (\text{A.23})$$

Substituindo A.23 nas condições de contorno A.7 e A.8, obtém-se para $\xi = 0$ e $\xi = \xi_T$, respectivamente:

$$B_n = (-S_S/\zeta_n)A_n, \quad (\text{A.24})$$

e

$$\tan(\zeta_n \xi_T) = \frac{(S_S - S_T)\zeta_n}{\zeta_n^2 + S_S S_T}, \quad (\text{A.25})$$

A equação A.25 dá solução múltipla para ζ_n e, portanto, para H_n e $Z_n(\xi)$. Como a equação A.25 é transcendental, a solução recomendada é utilizando o método iterativo de Newton-Rapson, pois as soluções apesar de múltiplas são bem-comportadas. Estas soluções são chamadas de *modos internos ou baroclínicos*, pois representam oscilações com propagação vertical. Note que nesse caso não há uma solução para A.25 quando $\xi_T \rightarrow \infty$, pois a função tangente não tem valor definido para argumento infinito, porém pode-se obter solução tornando p_T muito pequeno, da ordem de 10^{-5} , por exemplo, resultando em $\xi_T = 18,42$. Utilizando esse valor para p_T , obtém-se $H_0 = 9605,67$ m praticamente igual ao valor do limite quando $\xi_T \rightarrow \infty$.

As funções da estrutura vertical para os modos internos ficam dadas por:

$$Z_n = A_n [\cos(\zeta_n \xi) - (S_S/\zeta_n) \sin(\zeta_n \xi)]. \quad (\text{A.26})$$

Para que a integral vertical dada na condição de ortonormalidade A.10 seja 1, isto é,

$$\int_0^{\xi_T} Z_n^2 d\xi = 1, \quad (\text{A.27})$$

a constante A_n é obtida substituindo A.26 em A.27 e chegando a:

$$A_n = \left\{ \left[\frac{\xi_T}{2} + \frac{\sin(2\zeta_n \xi_T)}{4\zeta_n} \right] + S_S \left[\frac{\cos(2\zeta_n \xi_T) - 1}{2\zeta_n^2} \right] - S_S^2 \left[\frac{\sin(2\zeta_n \xi_T)/\zeta_n - 2\xi_T}{4\zeta_n^2} \right] \right\}^{-1/2} \quad (\text{A.28})$$

A profundidade equivalente H_n e o número de camadas mínimo para se ter uma solução numérica equivalente a solução analítica dos coeficientes espectrais dos termos não-lineares, tema que será mais bem entendido na análise analítica dos termos não-lineares, considerando uma certa tolerância, para o modo externo ($n = 0$) e para os modos internos ($n > 1$) estão na tabela A.1. Os resultados apresentados nas tabelas consideram apenas as classes 0, 1 e 2 e o primeiro modo da classe 3 para topos distintos. Normalmente os modelos globais têm topo acima de 50 hPa, por exemplo o MONAN tem topo em torno de 10 hPa e o BAMHY tem topo em 0,11 hPa, o que leva a resultados diferentes; tais resultados estão na tabela A.1.

Tabela A.1: Altura Equivalente e Número Mínimo de Camadas na Interação Vertical de Energia para os Modos Normais das Classes 0, 1, 2 e o Primeiro da 3 em Função do Topo Considerado

$$(4R_d \bar{S}/g \cong 4.215,02 \text{ m} \quad \text{Tolerância} = 2^{-26} = 1.49 \times 10^{-8})$$

Modos Verticais Analíticos						
	$p_T = 50 \text{ hPa}$ $\xi_T = 2,996$ $\bar{T}_T = 194,45 \text{ K}$		$p_T = 10 \text{ hPa}$ $\xi_T = 4,605$ $\bar{T}_T = 169,24 \text{ K}$		$p_T = 0,11 \text{ hPa}$ $\xi_T = 9,115$ $\bar{T}_T = 137,95 \text{ K}$	
Índice do Modo (n)	Altura Equivalente (H_n , m)	Mínimo de Camadas (K)	Altura Equivalente (H_n , m)	Mínimo de Camadas (K)	Altura Equivalente (H_n , m)	Mínimo de Camadas (K)
0	10.121,28	6	9.818,08	6	9.617,40	8
1	760,54	10	1.412,66	10	2.730,95	10
2	224,79	12	490,78	14	1.405,29	14
3	103,44	16	234,46	16	782,70	16
4	58,92	20	136,28	20	483,62	20
5	37,93	22	88,39	22	324,38	22
6	26,42	26	62,84	26	231,31	26
7	19,45	28	45,63	28	172,75	28
8	14,93	30	35,04	30	133,69	30
9	11,79	34	27,74	34	106,42	34

10	9,56	36	22,50	36	86,67	38
11	-	-	18,62	40	71,91	40
12	-	-	15,66	42	60,61	42
13	-	-	13,35	44	51,77	46
14	-	-	11,52	46	44,72	48
15	-	-	10,04	50	39,02	50
16	-	-	8,82	52	34,34	52
17	-	-	-	-	30,45	56
18	-	-	-	-	27,18	58
19	-	-	-	-	24,41	60
20	-	-	-	-	22,05	64
21	-	-	-	-	20,01	66
22	-	-	-	-	18,24	68
23	-	-	-	-	16,69	72
24	-	-	-	-	15,35	74
25	-	-	-	-	14,14	76
26	-	-	-	-	13,08	78
27	-	-	-	-	12,13	82
28	-	-	-	-	11,28	84
29	-	-	-	-	10,52	86
30	-	-	-	-	9,83	88

Nota-se na tabela A.1 que à medida que se torna o topo mais alto, mais modos aparecem nas classes 0, 1 e 2, sendo que para o topo em 50 hPa há 2 modos na classe 0, e 2 modos na classe 1 e 6 modos na classe 2, para o topo em 10 hPa há 2 modos na classe 0, 3 modos na classe 1 e 11 modos na classe 2 e para o topo em 0.11 hPa há 4 modos na classe 0, 6 modos na classe 1 e 20 na classe 2. Portanto, é mais difícil obter aumento de modos nas classes 0 e 1 que na classe 2. Então, de acordo com a configuração do modelo para o seu topo e o número de modos considerados, há que se utilizar o número mínimo de camadas do modo de mais alta ordem considerado. Por exemplo, com topo em 10 hPa e considerar as classes 0, 1 e 2, deve-se utilizar pelo menos 48 camadas. Como o topo em 10 hPa é o caso do MONAN, e o modelo tem 55 camadas, o MONAN estaria resolvendo bem as interações entre os modos verticais das classes 0, 1 e 2 e dos poucos primeiros modos da classe 3. Já O BAMHY com 64 camadas, estaria resolvendo bem as interações entre os modos verticais das classes 0 e 1 e os 11 primeiros da classe 2. Os modos cujas interações verticais não estão sendo bem resolvidas das classes 3 e 4, estão relacionados a processos de camada limite e de superfície. Salienta-se que as estruturas verticais dos modos associados às alturas equivalentes dadas na tabela A.1 tem comportamento semelhante aos dos modos apresentados na figura 5. Então, à medida que o modo fica mais interno, mais zeros possui e sua estrutura fica com mais variação vertical, então é esperado que para sua representação numérica ficar ajustada à analítica, mais camadas verticais são

necessárias. Para o cálculo do número de camadas necessário para um topo em 10^{-5} hPa é necessário relaxar a tolerância para $2^{-25} = 2,98 \times 10^{-8}$, que corresponderia a $p_T \rightarrow \infty$; topos mais altos que esse torna a convergência muito difícil. Dado que a solução é analítica, a classe 4 tem infinitas alturas equivalentes e não será considerada aqui, mesmo porque quanto menor o H_n , mais difícil fica a convergência no cálculo de K .

A seguir serão discutidas as soluções analíticas dos coeficientes espectrais dos termos não-lineares dos modelos. O modelo a ser considerado aqui será de equações primitivas, global, espectral, em coordenadas horizontais esféricas e verticais sigma. As equações após o procedimento de separação de variáveis na horizontal e vertical, onde as variáveis foram expandidas de acordo com a equação 7 considerando sigma no lugar da pressão (veja detalhes em Andrade, 1994), tem a equação A.4 para a estrutura vertical e a estrutura horizontal tem as seguintes equações, onde as equações da termodinâmica, continuidade e hidrostática foram manipuladas para se encontrar uma equação para a altura geopotencial generalizada:

$$\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial \tilde{t}} - \sin \varphi \hat{v}_n + \frac{\vartheta_n}{\cos \varphi} \frac{\partial \hat{h}_n}{\partial \lambda} = \hat{R}_n^u, \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial \hat{v}_n}{\partial \tilde{t}} + \sin \varphi \hat{u}_n + \vartheta_n \frac{\partial \hat{h}_n}{\partial \varphi} = \hat{R}_n^v, \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{\partial \hat{h}_n}{\partial \tilde{t}} + \frac{\vartheta_n}{\cos \varphi} \left(\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\hat{v}_n \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right) = \hat{R}_n^h, \quad (\text{A.31})$$

onde:

$$\vartheta_n = \frac{(gH_n)^{1/2}}{2\Omega a}, \quad (\text{A.32})$$

é uma constante adimensional que caracteriza a natureza do escoamento horizontal, e representa a razão entre a velocidade de fase da onda de gravidade pura, para cada modo vertical n , e a velocidade linear da superfície terrestre no equador, sendo Ω a velocidade angular e a o raio médio da Terra.

As variáveis vento horizontal e geopotencial são adimensionalizadas em função da velocidade de fase da onda de gravidade pura e da profundidade equivalente, respectivamente, como $u_n = \hat{u}_n / (gH_n)^{1/2}$; $v_n = \hat{v}_n / (gH_n)^{1/2}$ e $h_n = \hat{h}_n / H_n$.

A variável tempo t é adimensionalizada por 2Ω e os termos não-lineares e forçantes em A.29 a A.31 também o são: $R_n^u = \hat{R}_n^u / 2\Omega$; $R_n^v = \hat{R}_n^v / 2\Omega$; e $R_n^h = -\hat{R}_n^h / 2\Omega$.

Para o caso homogêneo, os valores de $\hat{R}_n^u$, $\hat{R}_n^v$ e $\hat{R}_n^h$ são nulos, e o sistema de equações governantes torna-se idêntico ao sistema de equações da água rasa linearizadas sobre a esfera, com um estado básico de repouso. As equações A.29 a A.31 mostram a evolução temporal dos coeficientes de expansão, enquanto as forçantes (parte não-linear) são representadas pelos termos advectivos e pelas contribuições das fontes e sumidouros de energia. A dedução das equações apresentadas neste item pode ser encontrada em Andrade (1994).

A seguir serão apresentados os termos à direita das equações A.29 a A.31, após a expansão dada nas equações 11 e 12 para sigma. O termo à direita da equação A.29 do movimento zonal será dividido da seguinte forma:

$$R_n^u = R_{1n}^u + R_{2n}^u + R_{3n}^u + R_{4n}^u. \quad (\text{A.33})$$

O termo R_{1n}^u representa a advecção horizontal do vento zonal e é dado por:

$$R_{1n}^u = - \sum_{\ell} \sum_m \left[u_{\ell} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda} + v_{\ell} \frac{\partial (u_m \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right] \frac{\vartheta_{\ell mn} \alpha_{\ell mn}}{\cos \varphi}, \quad (\text{A.34})$$

onde o termo adimensional $\vartheta_{\ell mn}$ é dado por:

$$\vartheta_{\ell mn} = \frac{[(gH_{\ell})(gH_m)]^{1/2}}{2\Omega a(gH_n)^{1/2}}, \quad (\text{A.35})$$

que para o caso $\ell = m = n$ essa equação se reduz para a equação A.32; e $\alpha_{\ell mn}$ é o coeficiente de interação tripla que representa a troca de energia dos modos ℓ e m para o modo vertical n , dado por:

$$\alpha_{\ell mn} = \int_{\sigma_T}^1 \Psi_{\ell}(\sigma) \Psi_m(\sigma) \Psi_n(\sigma) d\sigma. \quad (\text{A.36})$$

A solução analítica do coeficiente $\alpha_{\ell mn}$ é obtida através das soluções analíticas da estrutura vertical dadas nas equações A.19, A.21, A.26 e A.28 e considerando a equação A.6.

O segundo termo da equação A.33 envolve o desvio do campo de temperatura e é dado por:

$$R_{2n}^u = \frac{1}{\cos \varphi} \sum_m \left[\left(h_m - \frac{R_d \bar{T}_m}{gH_m} \mathbb{Q} \right) \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \lambda} \vartheta_{mmn} \chi_{mn} \right], \quad (\text{A.37})$$

onde $\bar{T}_m$ é o coeficiente de decomposição vertical de $\bar{T}$. Pode ser mostrado que (Andrade, 1994):

$$\mathbb{Q} = \ln(p_S/\bar{p}_S) = \sum_n \frac{gH_n}{R_d \bar{T}_S} \left[h_n \Psi_n(1) - \frac{z_S}{H_n} \right], \quad (\text{A.38})$$

E o coeficiente χ_{mn} representa a troca de energia dos modos m e n , resultante da variação vertical de temperatura do modo m , e é dado por:

$$\chi_{mn} = \int_{\sigma_T}^1 \sigma \frac{d\Psi_m}{d\sigma} \Psi_n d\sigma, \quad (\text{A.39})$$

A solução analítica do coeficiente χ_{mn} é obtida através das soluções analíticas da estrutura vertical dadas nas equações A.19, A.21, A.26 e A.28 e considerando a equação A.6.

O terceiro termo da equação A.33 envolve a advecção da pressão à superfície e é dado por:

$$R_{3n}^u = \frac{-1}{\cos \varphi} \sum_{\ell} \sum_m u_m \left[u_{\ell} \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \lambda} + v_{\ell} \cos \varphi \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\ell}}{\partial \lambda} + \frac{\partial (u_{\ell} \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right] \vartheta_{\ell mn} \tau_{\ell mn}, \quad (\text{A.40})$$

onde o coeficiente $\tau_{\ell mn}$ representa a transferência de energia para o modo vertical n devido a interação entre a velocidade horizontal do modo vertical ℓ e derivada do modo vertical modo vertical m , dado por:

$$\tau_{\ell mn} = \int_{\sigma_T}^1 \beta_{\ell}(\sigma) \frac{d\Psi_m}{d\sigma} \Psi_n d\sigma, \quad (\text{A.41})$$

onde

$$\beta_{\ell}(\sigma) = \int_{\sigma}^1 \Psi_{\ell} d\sigma - (1 - \sigma) \int_{\sigma_T}^1 \Psi_{\ell} d\sigma, \quad (\text{A.42})$$

com

$$\beta_{\ell}(1) = 0 \text{ e } \beta_{\ell}(\sigma_T) = \sigma_T \int_{\sigma_T}^1 \Psi_{\ell} d\sigma.$$

As soluções analíticas do coeficiente $\tau_{\ell mn}$ e de $\beta_{\ell}(\sigma)$ são obtidas através das soluções analíticas da estrutura vertical dadas nas equações A.19, A.21, A.26 e A.28 e considerando a equação A.6.

O quarto termo da equação A.33 representa uma dissipação de momentum tipo Rayleigh, e é dado por:

$$R_{4n}^u = - \sum_{\ell} \sum_m \Lambda_{\ell}^u \tilde{u}_m \vartheta_{\ell mn} \alpha_{\ell mn}, \quad (\text{A.43})$$

onde Λ_{ℓ}^u é o coeficiente de dissipação de momentum zonal adimensionalizado como $\Lambda_{\ell}^u = a \hat{\Lambda}_{\ell}^u / g H_{\ell}$, e representa a decomposição vertical do coeficiente de dissipação, considerado variando na vertical.

O termo a direita da equação A.30 do movimento meridional será dividido da seguinte forma:

$$R_n^v = R_{1n}^v + R_{2n}^v + R_{3n}^v + R_{4n}^v. \quad (\text{A.44})$$

O termo R_{1n}^v representa a advecção horizontal do vento zonal e é dado por:

$$R_{1n}^v = - \sum_{\ell} \sum_m \left[u_{\ell} \frac{\partial v_m}{\partial \lambda} + v_{\ell} \frac{\partial (v_m \cos \varphi)}{\partial \varphi} + (u_{\ell}^2 + v_{\ell}^2) \sin \varphi \right] \frac{\vartheta_{\ell mn} \alpha_{\ell mn}}{\cos \varphi}, \quad (\text{A.45})$$

onde $\vartheta_{\ell mn}$ e $\alpha_{\ell mn}$ foram definidos nas equações A.35 e A.36, respectivamente.

O termo R_{2n}^v da equação do movimento meridional A.33 tem uma expressão similar a obtida para o forçante zonal equação A.37, trocando-se $\cos \varphi \partial \lambda$ por $\partial \varphi$, o que não influencia nos coeficientes verticais. Já os termos R_{3n}^v e R_{4n}^v são expressos de forma análoga às equações A.40 e A.43, substituindo-se a variável u_m por v_m , e Λ_{ℓ}^u por Λ_{ℓ}^v em B.43, o que também não afeta os coeficientes verticais.

O termo a direita da equação A.31 da altura será dividido da seguinte forma:

$$R_n^h = R_{1n}^h + R_{2n}^h + R_{3n}^h + R_{4n}^h. \quad (\text{A.46})$$

O termo R_{1n}^h representa a advecção horizontal de altura e é dado por:

$$R_{1n}^h = \frac{1}{\cos \varphi} \sum_{\ell} \sum_m \vartheta_{\ell} \left[\left(u_{\ell} \frac{\partial h_m}{\partial \lambda} + v_{\ell} \frac{\partial (h_m \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right) (\xi_{\ell mn} - \alpha_{\ell mn}) + \left(h_m - \frac{R_d \bar{T}_m}{g H_m} \mathbb{Q} \right) \left(\frac{\partial u_{\ell}}{\partial \lambda} + \frac{\partial (u_{\ell} \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right) (\omega_{\ell mn} - \kappa \eta_{\ell mn}) \right], \quad (\text{A.47})$$

O coeficiente de interação $\xi_{\ell mn}$ representa as trocas de energia entre os modos verticais ℓ , m e n advindas da variação vertical do campo de temperatura e é dado por:

$$\xi_{\ell mn} = \frac{g H_m}{R_d \bar{S}} \int_{\sigma_T}^1 \sigma \frac{d\Psi_{\ell}}{d\sigma} \sigma \frac{d\Psi_m}{d\sigma} \Psi_n d\sigma. \quad (\text{A.48})$$

Os coeficientes de interação $\omega_{\ell mn}$ e $\eta_{\ell mn}$ são relacionados ao movimento vertical e $\omega_{\ell mn}$ é expresso por:

$$\omega_{\ell mn} = \frac{g H_m}{R_d \bar{S}} \int_{\sigma_T}^1 \frac{d}{d\sigma} \left[\beta_{\ell}(\sigma) \sigma \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma \frac{d\Psi_m}{d\sigma} \right) \right] \Psi_n d\sigma, \quad (\text{A.49})$$

com $\beta_{\ell}(\sigma)$ definido na equação A.42. O coeficiente $\eta_{\ell mn}$ tem a forma:

$$\eta_{\ell mn} = \frac{g H_m}{R_d \bar{S}} \int_{\sigma_T}^1 \frac{d}{d\sigma} \left[\theta_{\ell}(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma \frac{d\Psi_m}{d\sigma} \right) - \Psi_{\ell} \sigma \frac{d\Psi_m}{d\sigma} \right] \Psi_n d\sigma, \quad (\text{A.50})$$

com

$$\theta_{\ell}(\sigma) = \int_{\sigma}^1 \Psi_{\ell} d\sigma - \int_{\sigma_T}^1 \Psi_{\ell} d\sigma, \quad (\text{A.51})$$

sendo

$$\theta_{\ell}(1) = - \int_{\sigma_T}^1 \Psi_{\ell} d\sigma \text{ e } \theta_{\ell}(\sigma_T) = 0.$$

As soluções analíticas do coeficiente $\xi_{\ell mn}$, $\omega_{\ell mn}$, $\eta_{\ell mn}$ e de $\theta_{\ell}(\sigma)$ são obtidas através das soluções analíticas da estrutura vertical dadas nas equações A.19, A.21, A.26 e A.28 e considerando a equação A.6.

O termo R_{2n}^h da equação A.46 provem de termos não-lineares da equação da Termodinâmica relacionados com a velocidade vertical, e é dado por:

$$R_{2n}^h = \frac{1}{\cos \varphi} \sum_{\ell} \vartheta_{\ell} \left(u_{\ell} \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \lambda} + v_{\ell} \cos \varphi \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \varphi} \right) \times \sum_m \left(\chi_{mn} + \left(h_m - \frac{R_d \bar{T}_m}{g H_m} \mathbb{Q} \right) [\kappa (\alpha_{\ell mn} - \xi_{\ell mn} - \eta_{\ell mn}) + \omega_{\ell mn}] \right) \quad (\text{A.52})$$

Os coeficientes $\alpha_{\ell mn}$, $\xi_{\ell mn}$, $\omega_{\ell mn}$ e $\eta_{\ell mn}$ foram definidos nas equações A.36, A.48, A.49 e A.50, respectivamente.

O termo R_{3n}^h da equação A.46 está relacionado com um resfriamento Newtoniano na equação da energia Termodinâmica, e é dado por:

$$R_{3n}^h = \sum_{\ell} \sum_m \Lambda_{\ell}^T \left[\left(h_m - \frac{R_d \bar{T}_m}{g H_m} \mathbb{Q} \right) (\alpha_{\ell mn} - \xi_{\ell mn}) + \frac{\bar{T}_m}{\bar{S}} (\alpha_{\ell mn} - 2 \varrho_{\ell mn}) \right], \quad (\text{A.53})$$

onde Λ_{ℓ}^T representa a decomposição vertical do coeficiente de resfriamento Newtoniano, considerado variando com a altura, e é adimensionalizado por $\Lambda_{\ell}^T = \hat{\Lambda}_{\ell}^T / 2\Omega$, e

$$\varrho_{\ell mn} = \int_{\sigma_T}^1 \sigma \Psi_{\ell} \frac{d\Psi_m}{d\sigma} \Psi_n d\sigma. \quad (\text{A.54})$$

A solução analítica do coeficiente $\varrho_{\ell mn}$ é obtida através das soluções analíticas da estrutura vertical dadas nas equações A.19, A.21, A.26 e A.28 e considerando a equação A.6.

O termo R_{4n}^h da equação A.46 está relacionado com o aquecimento diabático na equação da energia Termodinâmica, e é dado por:

$$R_{4n}^h = \sum_m Q_m (\chi_{mn} + \delta_{mn}), \quad (\text{A.55})$$

onde δ_{mn} é o delta de Dirac e Q_m é expansão vertical da derivada vertical do termo de aquecimento da equação da Termodinâmica o qual é adimensionalizado tal que $\tilde{Q}_m = (\partial \dot{Q} / \partial \sigma)_m / 2\Omega \bar{S} C_p$.

O cálculo analítico dos coeficientes $\alpha_{\ell mn}$, $\tau_{\ell mn}$, $\xi_{\ell mn}$, $\omega_{\ell mn}$, $\varrho_{\ell mn}$, $\eta_{\ell mn}$, χ_{mn} , $\beta_{\ell}(\sigma)$ e $\theta_{\ell}(\sigma)$ é baseado nas autofunções analíticas $Z_n(\xi)$, mas suas equações são integrais em σ das autofunções $\Psi_n(\sigma)$. Então, há que se fazer uma mudança de variáveis tal que:

$$\alpha_n = \int_1^{\sigma_T} f(\Psi_n, \sigma) d\sigma = \int_0^{\xi_T} g(Z_n, \xi) d\xi, \quad (\text{A.56})$$

onde α_n representa os citados coeficientes. Como $Z_n(\xi)$ tem forma analítica exponencial para o modo externo e senoidal para os modos internos, a segunda integral de A.56 pode ser resolvida analiticamente. Porém, os modelos globais são resolvidos em camadas verticais, de forma que para se saber o número de camadas que representam bem as interações entre os modos verticais associadas a esses coeficientes, pode-se realizar uma quadratura gaussiana da segunda integral em A.56 e, com uma tolerância especificada, determinar quantos níveis verticais são necessários (no mínimo) para que essa integral analítica seja bem representada pelo seu cálculo através da quadratura gaussiana. Para tanto, uma nova mudança de variáveis é necessária para que os níveis verticais variem entre -1 e 1 e possa-se calcular as alturas gaussianas correspondentes. Essa mudança de variáveis é dada por:

$$\mu = 2 \xi / \xi_T - 1, \quad (\text{A.57})$$

de onde se $\xi = 0$, $\mu = -1$ e se $\xi = \xi_T$, $\mu = 1$, e a segunda integral em A.56 fica:

$$\int_0^{\xi_T} g(Z_n(\xi), \xi) d\xi = \int_{-1}^1 g(Z_n(\mu), \mu) d\mu \approx \sum_{k=1}^K g_k \varpi_k, \quad (\text{A.58})$$

Onde ϖ_k é o peso gaussiano associado às alturas gaussianas (μ_k ou ξ_k ou σ_k ou p_k) tal que:

$$\begin{aligned}\mu_k &= 2 \xi_k / \xi_T - 1 = \\ &= 2 \ln \sigma_k / \ln \sigma_T - 1 = \\ &= 2 (\ln p_k - \ln p_S) / (\ln p_T - \ln p_S) - 1 .\end{aligned}\quad (\text{A.59})$$

A tabela A.1 apresenta valores mínimos de K considerado $p_T = 50$ (valor de Fulton e Schubert, 1980), 10 (MONAN) e 0,11 hPa (BAMH) tal que a quadratura gaussiana em B.58 seja precisa com uma tolerância de $2^{-26} \approx 1,49 \times 10^{-8}$. Essa tolerância foi testada e considerada suficiente para essa análise. Levando-se em conta apenas classes 0, 1 e 2, tem-se que para o topo em 50 hPa, $H_{10(50)} = 11,79$ m e $K = 34$; para o topo em 10 hPa, $H_{15(10)} = 10,04$ m e $K = 50$ e para o topo em 0,11 hPa, $H_{29(0,11)} = 10,52$ m e $K = 86$. Logo, o MONAN com 55 camadas representa bem essas as interações entre essas 3 classes e entre os primeiros modos da classe 3. Já o BAMH com 64 camadas, representa bem as interações entre os modos da classe 0 e 1, e dos primeiros 11 modos de 22 da classe 2, dentro da tolerância especificada. Ressalta-se que apesar do número de camadas verticais dos modelos serem relativamente bons, as camadas não são gaussianas na vertical. Destaca-se, também, que os valores de H_n permanecem os mesmos para outros valores de tolerância, ou seja, uma tolerância maior ou menor não afeta os valores das alturas equivalentes, nem a estrutura vertical analítica correspondente, para um dado topo.

Os coeficientes $\alpha_{\ell mn}$, $\tau_{\ell mn}$, $\xi_{\ell mn}$, $\omega_{\ell mn}$ e $\eta_{\ell mn}$ são os que determinam o número de níveis verticais para que a solução numérica seja compatível com a analítica e para todos se obtém o mesmo K . Portanto, para exemplificar os cálculos analítico e numéricos será analisado o coeficiente $\alpha_{\ell mn}$, lembrando que $d\sigma = -\exp \xi d\xi$, quando $\sigma = 1 \Rightarrow \xi = 0$ e $\sigma = \sigma_T \Rightarrow \xi = \xi_T$ e que $\Psi_n(\sigma) = \exp(-\xi/2) Z_n(\xi)$, então:

$$\begin{aligned}\alpha_{\ell mn} &= \int_{\sigma_T}^1 \Psi_\ell(\sigma) \Psi_m(\sigma) \Psi_n(\sigma) d\sigma = \\ &= - \int_{\xi_T}^0 Z_\ell(\xi) \exp(-\xi/2) Z_m(\xi) \exp(-\xi/2) Z_n(\xi) \exp(-\xi/2) \exp \xi d\xi = \\ &= \int_0^{\xi_T} Z_\ell(\xi) Z_m(\xi) Z_n(\xi) \exp(-\xi/2) d\xi \approx \\ &\approx \sum_{k=1}^K Z_\ell(\xi_k) Z_m(\xi_k) Z_n(\xi_k) \exp(-\xi_k/2) \varpi_k .\end{aligned}\quad (\text{A.60})$$

As expressões para $Z_n(\xi)$ são as dadas pelas equações A.19, A.21, A.26 e A.28, podendo-se, então, calcular a última integral em ξ de A.60 de forma analítica e a somatória final da equação A.60 de forma numérica para verificar a quantidade mínima de camadas (K) necessárias para se ter o mesmo resultado que o analítico dentro da tolerância especificada. Essa quantidade de camadas se refere ao modelo. O teste de convergência para os valores de K é rigoroso e é realizado para todos os ℓ , m e n , isto é, todos os modos terão que convergir.

Na figura A.1 encontra-se o estado básico analítico da temperatura e da estabilidade estática em coordenadas $\xi = \ln(p_S/p)$ para $p_T = 10$ hPa; o eixo vertical foi expresso em termos de pressão para facilidade de entendimento (veja equação A.59). A temperatura $\bar{T}(\xi)$ diminui, de acordo com a equação A.61 a seguir, e a estabilidade estática $\bar{S}$ é constante com a altura. A temperatura básica analítica (K) é dada por:

$$\bar{T}(\xi) = (\bar{T}_S - \bar{T}_\infty) \exp(-\kappa \xi) + \bar{T}_\infty , \quad (\text{A.61})$$

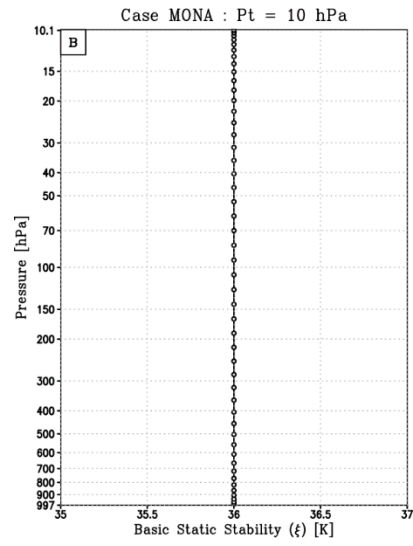
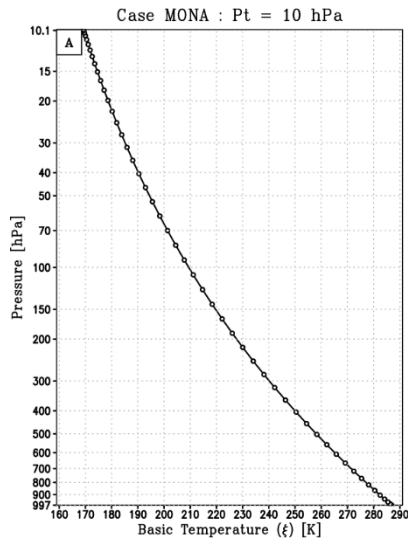


Figura A.1 – Estado Básico Analítico da Temperatura (A) e da Estabilidade Estática (B) para $p_T=10$ hPa.

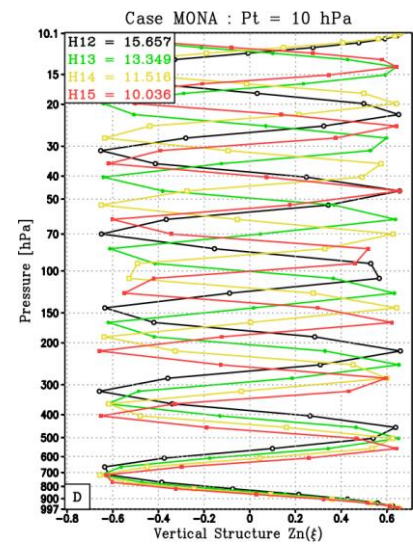
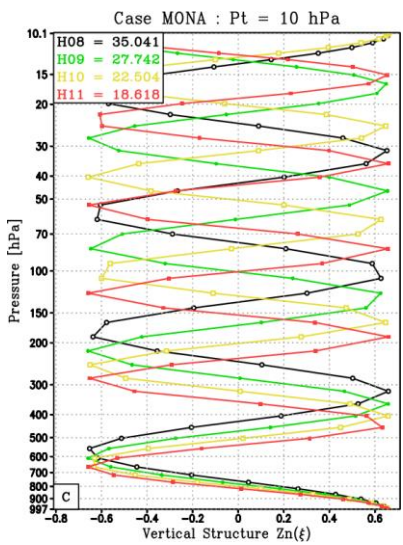
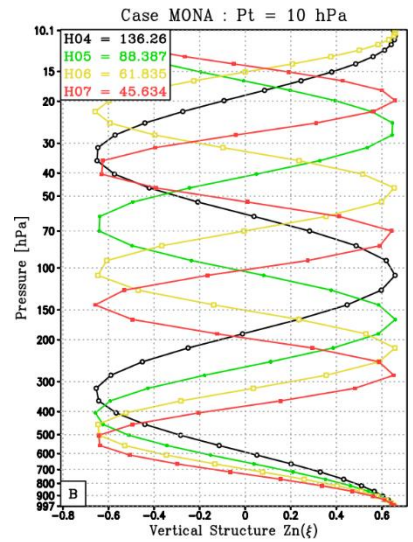
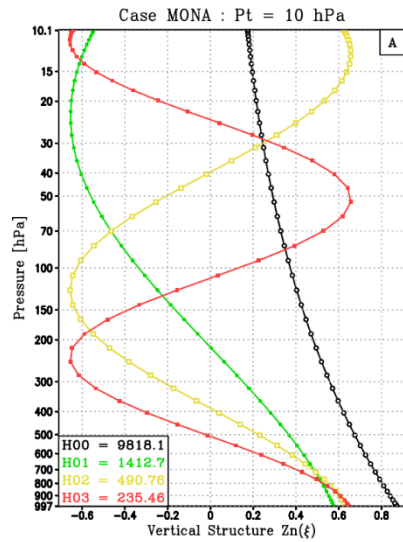


Figura A.2 – Estruturas Verticais Analíticas das Autofunções $Z_n(\xi)$ para $p_T=10$ hPa e classes 0, 1 e 2.

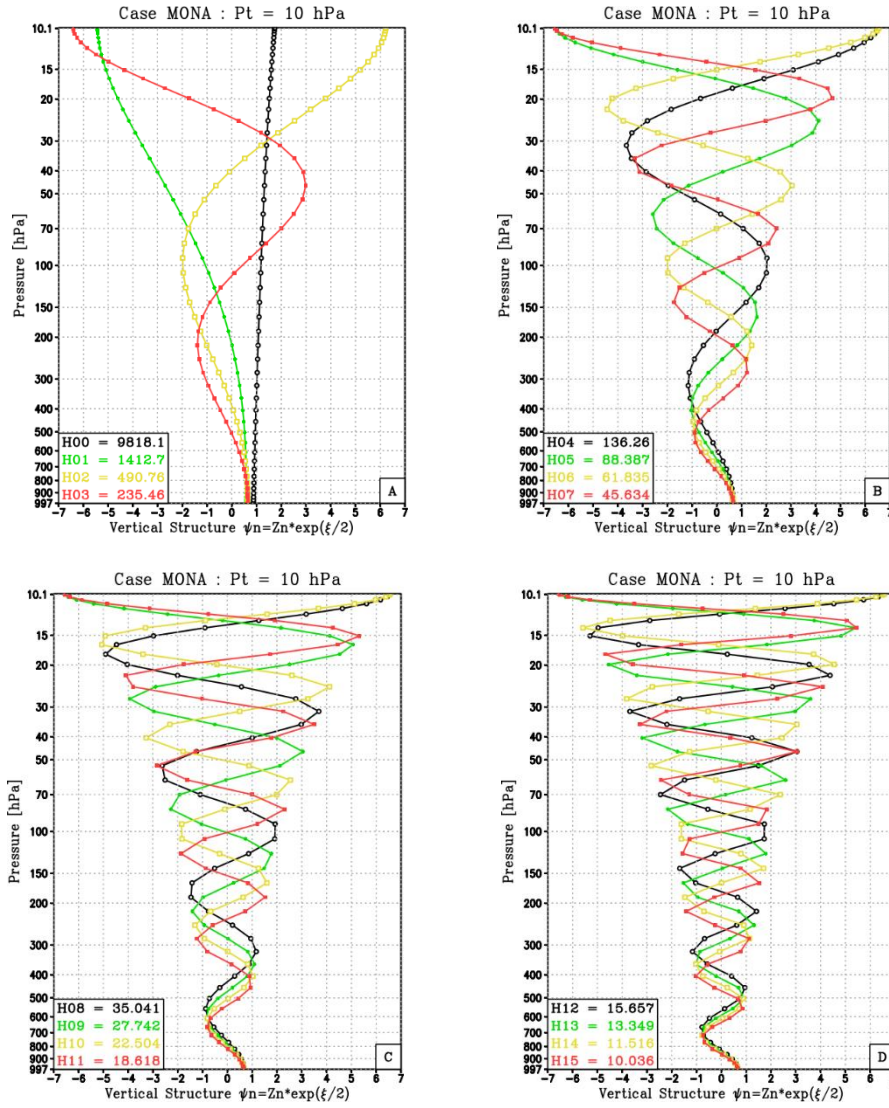


Figura A.3 – Estruturas Verticais Analíticas das Autofunções $\Psi_n(\xi) = Z_n(\xi) \exp(\xi/2)$ para $p_T=10$ hPa e classes 0, 1 e 2.

As figuras A.2 e A.3 mostram as estruturas verticais analíticas das autofunções $Z_n(\xi)$ e $\Psi_n(\xi) = Z_n(\xi) \exp(\xi/2)$ para as classes 0 (2 modos), 1 (3 modos) e 2 (11 modos). O comportamento é semelhante aos modos verticais mostrados a figura 6, porém há uma variação vertical mais suave e para $Z_n(\xi)$ as amplitudes analíticas permanecem as mesmas com a altura e para $\Psi_n(\xi)$ as amplitudes analíticas crescem com a altura com máximo no topo, ao contrário dos modos numéricos da figura 6. Se não houvesse topo, as amplitudes de $\Psi_n(\xi)$ tenderiam a infinito e não seria possível uma solução analítica, ou seja, a solução analítica só se tornou viável pela imposição de um topo, coerente com a aproximação de pouca profundidade das equações primitivas. Esse crescimento com a altura também se deve ao fato de que a estabilidade estática é constante e torna-se baixa para altos níveis.

Os coeficientes $\alpha_{\ell mn}$, χ_{mn} e $\tau_{\ell mn}$ nas equações A.34, A.37, A.40 e A.43 do movimento zonal e as correspondentes para o movimento meridional, estão multiplicados por $\vartheta_{\ell mn}$ (equação A.35). Então, o que determina a interação é esse produto, ou seja, por exemplo:

$$\alpha'_{\ell mn} = \vartheta_{\ell mn} \alpha_{\ell mn}. \quad (\text{A.62})$$

Note que em $\alpha_{\ell mn}$ (equação A.36) para ℓ , m e n distintos entre si, qualquer troca entre eles resulta no mesmo valor. Porém, para $\alpha'_{\ell mn}$, como tem $\vartheta_{\ell mn}$ em sua definição, o valor só permanece o mesmo se trocarmos ℓ por m com o mesmo n , pois na definição de $\vartheta_{\ell mn}$ (veja equação A.35) há o produto $H_\ell H_m$ no numerador e H_n no denominador; portanto, a troca ℓ por m não altera o produto do numerador, porém trocar ℓ ou m por n altera o numerador e o denominador, mudando o valor de $\alpha'_{\ell mn}$. Então, pode-se escrever que: $\alpha'_{\ell mn} = \alpha'_{m\ell n}$.

Nas tabelas A.2 ($p_T = 50$ hPa; Fulton e Schubert, 1980) e A.3 ($p_T = 10$ hPa; modelo MONAN) encontram-se os principais valores de $\alpha'_{\ell mn}$ para os modos das classes 0, 1 e 2 e na tabela A.4 ($p_T = 0,11$ hPa; modelo BAMH) para os modos da classe 0. São apresentados somente esses valores como exemplo, pois seriam muitos ao se considerar um espectro modal maior. Nas tabelas, quando os valores de ℓ , m e n ficam maiores que 10, foram usadas vírgulas para evitar má interpretação. Os valores principais de $\alpha'_{\ell mn}$ dados na tabela A.2 são tais que $\alpha'_{0nn} = \alpha'_{n0n}$, $n \geq 0$, com média de 0,3821 e α'_{001} , α'_{111} , $\alpha'_{n-11n} = \alpha'_{1n-1n}$, $n \geq 2$, com média em valor absoluto de 0,1330, os demais coeficientes são de ordem menor. Os maiores coeficientes de interação são para a interação não-linear entre o modo externo e dois internos iguais, a seguir tem-se a interação não-linear entre o modo externo com ele mesmo e com o primeiro interno, a interação não-linear tripla entre o primeiro modo interno e a interação não-linear entre o primeiro modo interno e dois outros internos com índices verticais consecutivos, diferentes do primeiro.

Tabela A.2 – Principais Coeficientes de Interação Não-linear para $p_T = 50$ hPa e classes 0 (H_0 e H_1), 1 (H_2 e H_3) e 2 (H_4 a H_9).

$ \alpha'_{\ell mn} > 0,1$	$p_T = 50$ hPa
$\alpha'_{000} = 0,3549$	$\alpha'_{001} = -0,1756$ $\alpha'_{011} = \alpha'_{101} = 0,4005$ $\alpha'_{111} = -0,1474$
$\alpha'_{022} = \alpha'_{202} = 0,3874$ $\alpha'_{112} = 0,1857$	$\alpha'_{033} = \alpha'_{303} = 0,3843$ $\alpha'_{123} = \alpha'_{213} = 0,1416$
$\alpha'_{044} = \alpha'_{404} = 0,3832$ $\alpha'_{134} = \alpha'_{314} = 0,1258$	$\alpha'_{055} = \alpha'_{505} = 0,3826$ $\alpha'_{145} = \alpha'_{415} = 0,1177$
$\alpha'_{066} = \alpha'_{606} = 0,3823$ $\alpha'_{156} = \alpha'_{516} = 0,1129$	$\alpha'_{077} = \alpha'_{707} = 0,3821$ $\alpha'_{167} = \alpha'_{617} = 0,1097$
$\alpha'_{088} = \alpha'_{808} = 0,3820$ $\alpha'_{178} = \alpha'_{718} = 0,1074$	$\alpha'_{099} = \alpha'_{909} = 0,3819$ $\alpha'_{189} = \alpha'_{819} = 0,1057$

Salienta-se que para topos mais altos (tabelas A.3 e A.4) esse padrão muda, embora essas interações não-lineares continuem a ser importantes, mas surgem outras que também são relevantes. Os valores do primeiro tipo para $p_T = 0,11$ hPa aumentam consideravelmente, mas

o segundo tipo fica maior, em módulo, que o primeiro, em geral. Surgem, ainda, outros tipos relevantes com $|\alpha'_{\ell mn}| > 0,1$. Então, parece crucial que os modelos tenham topos relativamente altos para melhor representar a interação não-linear entre os modos verticais.

Tabela A.3 – Principais Coeficientes de Interação Não-linear para $p_T = 10$ hPa e classes 0 (H_0 e H_1), 1 (H_2 a H_4) e 2 (H_5 a H_{15}).

$ \alpha'_{\ell mn} > 0,1$	$p_T = 10$ hPa
$\alpha'_{000} = 0,3569$	$\alpha'_{001} = -0,1702$ $\alpha'_{011} = \alpha'_{101} = 0,4470$ $\alpha'_{111} = -0,3576$ $\alpha'_{121} = \alpha'_{211} = 0,1226$
$\alpha'_{012} = \alpha'_{102} = -0,1061$ $\alpha'_{022} = \alpha'_{202} = 0,4222$ $\alpha'_{112} = 0,3528$ $\alpha'_{122} = \alpha'_{212} = -0,2536$ $\alpha'_{132} = \alpha'_{312} = 0,1327$	$\alpha'_{033} = \alpha'_{303} = 0,4149$ $\alpha'_{123} = \alpha'_{213} = 0,2766$ $\alpha'_{133} = \alpha'_{313} = -0,2315$ $\alpha'_{143} = \alpha'_{413} = 0,1423$ $\alpha'_{223} = -0,1340$
$\alpha'_{044} = \alpha'_{404} = 0,4120$ $\alpha'_{134} = \alpha'_{314} = 0,2459$ $\alpha'_{144} = \alpha'_{414} = -0,2238$ $\alpha'_{154} = \alpha'_{514} = 0,1492$ $\alpha'_{224} = 0,1985$	$\alpha'_{055} = \alpha'_{505} = 0,4106$ $\alpha'_{145} = \alpha'_{415} = 0,2300$ $\alpha'_{155} = \alpha'_{515} = -0,2203$ $\alpha'_{165} = \alpha'_{615} = 0,1542$ $\alpha'_{235} = \alpha'_{325} = 0,1670$
$\alpha'_{066} = \alpha'_{606} = 0,4098$ $\alpha'_{156} = \alpha'_{516} = 0,2204$ $\alpha'_{166} = \alpha'_{616} = -0,2183$ $\alpha'_{176} = \alpha'_{716} = 0,1579$ $\alpha'_{246} = \alpha'_{426} = 0,1506$ $\alpha'_{336} = 0,1355$	$\alpha'_{077} = \alpha'_{707} = 0,4093$ $\alpha'_{167} = \alpha'_{617} = 0,2140$ $\alpha'_{177} = \alpha'_{717} = -0,2172$ $\alpha'_{187} = \alpha'_{817} = 0,1608$ $\alpha'_{257} = \alpha'_{527} = 0,1405$ $\alpha'_{347} = \alpha'_{437} = 0,1190$
$\alpha'_{088} = \alpha'_{808} = 0,4090$ $\alpha'_{178} = \alpha'_{718} = 0,2094$ $\alpha'_{188} = \alpha'_{818} = -0,2124$ $\alpha'_{198} = \alpha'_{918} = 0,1631$ $\alpha'_{268} = \alpha'_{268} = 0,1338$ $\alpha'_{358} = \alpha'_{538} = 0,1089$ $\alpha'_{448} = 0,1025$	$\alpha'_{099} = \alpha'_{909} = 0,4088$ $\alpha'_{189} = \alpha'_{819} = 0,2060$ $\alpha'_{199} = \alpha'_{919} = -0,2159$ $\alpha'_{1,10,9} = \alpha'_{10,1,9} = 0,1649$ $\alpha'_{279} = \alpha'_{729} = 0,1290$ $\alpha'_{369} = \alpha'_{369} = 0,1021$
$\alpha'_{0,10,10} = \alpha'_{10,0,10} = 0,4086$ $\alpha'_{1,9,10} = \alpha'_{9,1,10} = 0,2033$ $\alpha'_{1,10,10} = \alpha'_{10,1,10} = -0,2156$	$\alpha'_{0,11,11} = \alpha'_{11,0,11} = 0,4085$ $\alpha'_{1,10,11} = \alpha'_{10,1,11} = 0,2012$ $\alpha'_{1,11,11} = \alpha'_{11,1,11} = -0,2153$

$\alpha'_{1,11,10} = \alpha'_{11,1,10} = \mathbf{0,1665}$ $\alpha'_{2,8,10} = \alpha'_{8,2,10} = \mathbf{0,1253}$	$\alpha'_{1,12,11} = \alpha'_{12,1,11} = \mathbf{0,1678}$ $\alpha'_{2,8,11} = \alpha'_{8,2,11} = \mathbf{0,1225}$
$\alpha'_{0,12,12} = \alpha'_{12,0,12} = \mathbf{0,4084}$ $\alpha'_{1,11,12} = \alpha'_{11,1,12} = \mathbf{0,1995}$ $\alpha'_{1,12,12} = \alpha'_{12,1,12} = \mathbf{-0,2151}$ $\alpha'_{1,13,12} = \alpha'_{13,1,12} = \mathbf{0,1689}$ $\alpha'_{2,10,12} = \alpha'_{10,2,12} = \mathbf{0,1202}$	$\alpha'_{0,13,13} = \alpha'_{13,0,13} = \mathbf{0,4083}$ $\alpha'_{1,12,13} = \alpha'_{12,1,13} = \mathbf{0,1981}$ $\alpha'_{1,13,13} = \alpha'_{13,1,13} = \mathbf{-0,2148}$ $\alpha'_{1,14,13} = \alpha'_{14,1,13} = \mathbf{0,1698}$ $\alpha'_{2,11,13} = \alpha'_{11,2,13} = \mathbf{0,1184}$
$\alpha'_{0,14,14} = \alpha'_{14,0,14} = \mathbf{0,4083}$ $\alpha'_{1,13,14} = \alpha'_{13,1,14} = \mathbf{0,1968}$ $\alpha'_{1,14,14} = \alpha'_{14,1,14} = \mathbf{-0,2147}$ $\alpha'_{1,15,14} = \alpha'_{15,1,15} = \mathbf{0,1706}$ $\alpha'_{2,12,14} = \alpha'_{12,2,14} = \mathbf{0,1169}$	$\alpha'_{0,15,15} = \alpha'_{15,0,15} = \mathbf{0,4082}$ $\alpha'_{1,14,15} = \alpha'_{14,1,15} = \mathbf{0,1958}$ $\alpha'_{1,15,15} = \alpha'_{15,1,15} = \mathbf{-0,2147}$ $\alpha'_{2,13,15} = \alpha'_{13,2,15} = \mathbf{0,1156}$

Tabela A.4 – Principais Coeficientes de Interação Não-linear para $p_T = 0,11$ hPa e classe 0 (H_0 a H_3).

$ \alpha'_{\ell mn} > 0,1$	$p_T = 0,11$ hPa
$\alpha'_{000} = \mathbf{0,3449}$ $\alpha'_{110} = \mathbf{0,1818}$	$\alpha'_{001} = \mathbf{-0,1335}$ $\alpha'_{011} = \alpha'_{101} = \mathbf{0,6402}$ $\alpha'_{021} = \alpha'_{201} = \mathbf{-0,1064}$ $\alpha'_{111} = \mathbf{-1,8974}$ $\alpha'_{121} = \alpha'_{211} = \mathbf{0,8652}$ $\alpha'_{131} = \alpha'_{311} = \mathbf{-0,1623}$ $\alpha'_{221} = \mathbf{-0,8661}$ $\alpha'_{231} = \alpha'_{321} = \mathbf{-0,4249}$ $\alpha'_{331} = \mathbf{-0,4307}$
$\alpha'_{012} = \alpha'_{102} = \mathbf{-0,2068}$ $\alpha'_{022} = \alpha'_{202} = \mathbf{0,6151}$ $\alpha'_{032} = \alpha'_{302} = \mathbf{-0,1182}$ $\alpha'_{112} = \mathbf{1,6815}$ $\alpha'_{122} = \alpha'_{212} = \mathbf{-1,6831}$ $\alpha'_{132} = \alpha'_{312} = \mathbf{0,8258}$ $\alpha'_{222} = \mathbf{1,1130}$ $\alpha'_{232} = \alpha'_{322} = \mathbf{-0,7626}$ $\alpha'_{332} = \mathbf{0,4969}$	$\alpha'_{023} = \alpha'_{203} = \mathbf{-0,2123}$ $\alpha'_{033} = \alpha'_{303} = \mathbf{0,5932}$ $\alpha'_{113} = \mathbf{-0,5664}$ $\alpha'_{123} = \alpha'_{213} = \mathbf{1,4826}$ $\alpha'_{133} = \alpha'_{313} = \mathbf{-1,5029}$ $\alpha'_{223} = \mathbf{-1,3693}$ $\alpha'_{233} = \alpha'_{323} = \mathbf{0,8922}$ $\alpha'_{333} = \mathbf{-0,5431}$

Apêndice B: Propriedades das Funções Associadas de Legendre Normalizadas

São apresentadas algumas propriedades das funções associadas de Legendre normalizadas que foram utilizadas no desenvolvimento de equações apresentadas no texto principal.

As funções associadas de Legendre normalizadas de grau m e ordem s são expressas por:

$$P_m^s(\mu) = \left[\frac{(2m+1)(m-s)!}{2(m+s)!} \right]^{1/2} \frac{(1-\mu^2)^{s/2}}{2^m m!} \frac{d^{m+s}}{d\mu^{m+s}} (\mu^2 - 1)^m, \quad (\text{B.1})$$

onde $\mu = \sin \varphi$, φ é a latitude e $(1 - \mu^2)^{1/2} = \cos \varphi$. Essas funções formam uma base completa com a seguinte propriedade de ortonormalidade no intervalo $-1 \leq \mu \leq 1$:

$$\int_{-1}^1 P_m^s(\mu) P_q^s(\mu) d\mu = \delta_{m,q}, \quad (\text{B.2})$$

onde $\delta_{m,q}$ é o delta de Kronecker. Considerando:

$$E_m^s = \left[\frac{(m^2 - s^2)}{(4m^2 - 1)} \right]^{1/2}. \quad (\text{B.3})$$

Uma propriedade importante das funções associadas de Legendre é que (veja figura):

$$P_m^s(\mu) = 0 \text{ se } m < s. \quad (\text{B.4})$$

As seguintes propriedades e relações de recorrência que podem ser encontradas em tabelas matemáticas:

$$E_{m+1}^s P_{m+1}^s(\mu) - \mu P_m^s(\mu) + E_m^s P_{m-1}^s(\mu) = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$D P_m^s(\mu) = (m+1) E_m^s P_{m-1}^s(\mu) - m E_{m+1}^s P_{m+1}^s(\mu), \quad (\text{B.6})$$

onde

$$D(\) = \cos \varphi \frac{d}{d\varphi}(\) = (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu}(\), \quad (\text{B.7})$$

$$\nabla^2 P_m^s(\mu) = -m(m+1) P_m^s(\mu), \quad (\text{B.8})$$

onde

$$\nabla^2(\) = \left\{ \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \right] - \frac{s^2}{(1 - \mu^2)} \right\}(\) \quad (\text{B.9})$$

e

$$(\mu \nabla^2 + D) P_m^s(\mu) = -(m-1)(m+1) E_m^s P_{m-1}^s(\mu) - m(m+2) E_{m+1}^s P_{m+1}^s(\mu). \quad (\text{B.10})$$

Para o cálculo dos $P_m^s(\mu)$ usando a relação de recorrência B.5, reescreve-se B.5 da seguinte forma:

$$P_{m+1}^s(\mu) = (\mu/E_{m+1}^s) P_m^s(\mu) + (E_m^s/E_{m+1}^s) P_{m-1}^s(\mu), \quad (\text{B.11})$$

primeiro calcula-se $P_s^s(\mu)$, que usando a equação B.1 dá:

$$P_s^s(\mu) = \xi_s (1 - \mu^2)^{s/2}, \quad (\text{B.12})$$

onde

$$\xi_{s+1} = \xi_s [(2s + 3)/(2s + 2)]^{1/2}, \quad (\text{B.13})$$

com

$$\xi_0 = (1/2)^{1/2}. \quad (\text{B.14})$$

Fazendo $m = s$ em B.11 e considerando B.4 encontra-se:

$$P_{s+1}^s(\mu) = (\mu/E_{s+1}^s)P_s^s(\mu). \quad (\text{B.15})$$

Com $P_s^s(\mu)$ de B.12 e $P_{s+1}^s(\mu)$ de B.15 pode-se calcular $P_{s+2}^s(\mu)$ usando B.11 e assim sucessivamente para os demais $P_m^s(\mu)$ com $m \geq s + 2$.