



# WORK VIII 2025 Eta

WORKSHOP EM MODELAGEM NUMÉRICA DE TEMPO, CLIMA  
E MUDANÇAS CLIMÁTICAS UTILIZANDO O MODELO ETA

## Método Numérico Aplicado a Atmosfera

Fundamentos (EDO,EDP)  
e Aplicações

## Conceitos Básicos

### O que é Modelagem Numérica?

Modelagem Numérica refere-se a uma **representação matemática** que utiliza **algoritmos** e **equações** para simular fenômenos físicos, biológicos ou sociais.

Através de **simulações computacionais**, os **modelos numéricos** ajudam a entender o **comportamento de sistemas dinâmicos** e a **tomar decisões** informadas com base em dados quantitativos.

### Tipos de Modelos Numéricos

**Modelos Determinísticos:** Produzem resultados previsíveis a partir de condições iniciais específicas.

**Modelos Estocásticos:** Incorporam variáveis aleatórias, permitindo a análise de incertezas.

### Processo de Construção de um Modelo Numérico

- 1 Definição do Problema e Coleta de Dados
- 2 Análise de Dados e Formulação Matemática
- 3 Implementação em Software de Simulação
- 4 Teste e Validação do Modelo
- 5 Interpretação dos Resultados
- 6 Aplicação e Refinamento



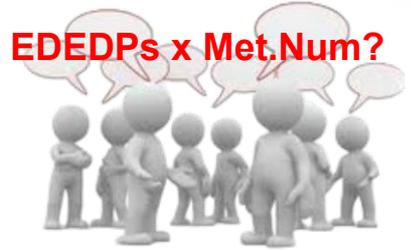
**Conceitos Básicos**  
**Modelagem Numérica X**  
**Método numérico**

# Conceitos Básicos - Método Numérico Aplicado a Atmosfera

As **equações EDO e EDP** são usadas para similar fenômenos físicos, biológicos ou sociais

$$+2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

**EDEDPs x Met.Num?**



essa expressão tem certa semelhança com a equação de uma seção cônica:"

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

"onde  $a, b, c, d, f$  são constantes. Conforme ilustrado pela Figura abaixo, **esta equação algébrica representa uma elipse, parábola ou hipérbole**, dependendo se  $b^2 - 4ac$  é negativo, igual a zero ou positivo, respectivamente."

- **Hiperbólica** :  $B^2 - AC > 0$
- **Parabólica** :  $B^2 - AC = 0$
- **Elíptica** :  $B^2 - AC < 0$

**Lembre-se das equações das seções cônicas**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

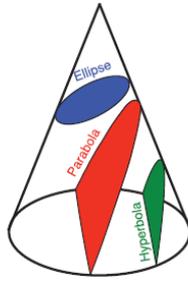
**Hiperbólica**

$$x^2 = y$$

**Parabólica**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Elíptica**



# Conceitos Básicos - Método Numérico Aplicado a Atmosfera

As dependências das soluções das **equações EDO e EDP às condições iniciais e de contorno**

PDE	$b^2 - 4ac$	Boundary & initial conditions	Examples
Elliptic	$b^2 - 4ac < 0$	Dirichlet/Neumann/Cauchy	Laplace Eq.
Parabolic	$b^2 - 4ac = 0$	One initial + two boundary conditions	Diffusion Eq.
Hyperbolic	$b^2 - 4ac > 0$	Two initial + two boundary conditions	Wave Eq.



$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

**Equação de onda (Hiperbólica)**

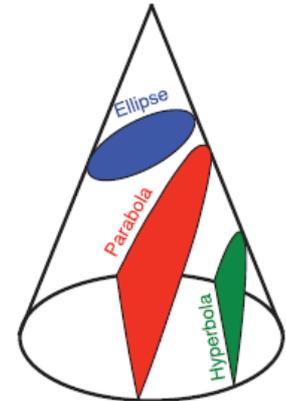
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Equação de difusão (Parabólica)**

$$y = x^2$$

**Equação de Poisson (Elíptica)**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



# Conceitos Básicos - Método Numérico Aplicado a Atmosfera

1) Segunda lei de Newton

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \vec{F}(x, t)$$

2) Oscilador Harmônico Simples

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \omega^2 x = 0$$

3) Lei do Decaimento Radioativo

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \lambda N = 0$$

4) Equação de Crescimento Logístico

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

5) Equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

6) Equação de Laplace

$$\nabla^2 u = 0$$

7) Equação de Poisson

$$\nabla^2 u = f(x, y)$$

8) Equação de Difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u$$

17) Equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

9) Equação de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

10) Equação de Onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

11) Equação de Schrodinger (time-dep)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

16) Equação de Klein-Gordon

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar}\right)\psi = 0$$

12) Equação de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow (\text{Lei Gauss E})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow (\text{Lei Gauss B})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow (\text{Lei Faraday})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow (\text{Lei Ampere - Maxwell})$$

**Equações diferenciais usadas para descrever os processos naturais**



22) Equação Burger

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

18) Equação de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \vec{f}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

23) Equação Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

24) Equação Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0$$

19) Equação de Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

26) Equação de Conservação de Energia

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}) = Q$$

20) Equação de Einstein Field

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

21) Equação Sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin(\phi) = 0$$

25) Equação Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left( q, \frac{\partial S}{\partial a}, t \right) = 0$$

# Equações Matemáticas Para Simulações Atmosféricas?

## •Equações Diferenciais Fundamentais usadas para descrever a Atmosfera

Vamos  
começar  
com as  
EDPs  
básica para  
a ciência  
atmosféricas  
e oceânica



### •Equação da continuidade

19) Equação de Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

### •Equações de Navier-Stokes (forma primitiva)

18) Equação de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) = -\vec{\nabla} P + 2\Omega \times \vec{V} + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \vec{f}$$

### •Equação de energia (termodinâmica)

26) Equação de Conservação de Energia

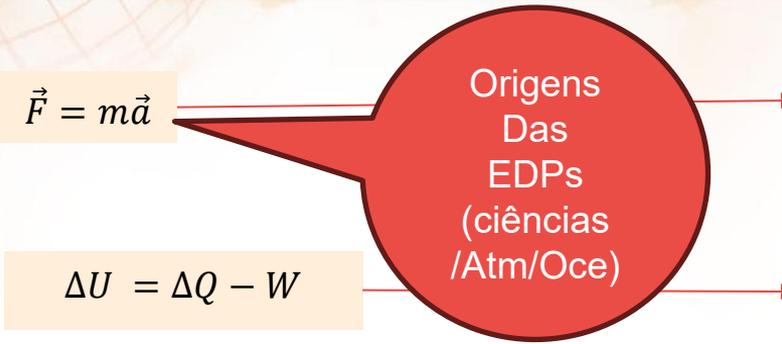
$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}) = Q$$

### •Equações de conservação de massa para vapor d'água, salinidade

19) Equação de Conservação de Massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = S$$

# Equações Diferenciais Parciais Para Simulações Atmosféricas?



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Delta U = \Delta Q - W$$

$$\text{fluxo} = q = \frac{\text{quantidade atravessando um contorno}}{\text{area do contorno} \times \text{duração do tempo}}$$

•Equação da continuidade

**Estrutura da atmosfera Estática Obedece a hidrostática**

**Segue a lei da Equação de estado para os gases ideais**

•Equações de Navier-Stokes (forma primitiva)

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\rho}{\rho_0} g \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j u_k + \nu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$$

•Equação de energia (termodinâmica)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) T - S_P \omega = \frac{J}{C_p}$$

•Equação da conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{S}{V}$$

$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{kg_{H_2O}}{kg_{ar}} = \bar{c}$

•Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

$$P = -\rho g z$$

$$P = \rho R T$$

# As EDPs para Atmosfera

Introdução à Previsão Numérica de Tempo e Clima

Equações governantes para o escoamento médio da atmosférico

## Equações Conservação de Momentum (F=ma)

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t} + (\bar{u}) \frac{\partial(\bar{u})}{\partial x} + (\bar{v}) \frac{\partial(\bar{u})}{\partial y} + (\bar{w}) \frac{\partial(\bar{u})}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x} - 2\Omega\eta_3(\bar{v}) - \nu \frac{\partial^2(\bar{u})}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2(\bar{u})}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2(\bar{u})}{\partial z^2} = - \frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'u'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'u'})}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(\bar{v})}{\partial t} + (\bar{u}) \frac{\partial(\bar{v})}{\partial x} + (\bar{v}) \frac{\partial(\bar{v})}{\partial y} + (\bar{w}) \frac{\partial(\bar{v})}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial y} + 2\Omega\eta_3(\bar{u}) - \nu \frac{\partial^2(\bar{v})}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2(\bar{v})}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2(\bar{v})}{\partial z^2} = - \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'v'})}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(\bar{w})}{\partial t} + (\bar{u}) \frac{\partial(\bar{w})}{\partial x} + (\bar{v}) \frac{\partial(\bar{w})}{\partial y} + (\bar{w}) \frac{\partial(\bar{w})}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial z} + g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} - \nu \frac{\partial^2(\bar{w})}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2(\bar{w})}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2(\bar{w})}{\partial z^2} = - \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'w'})}{\partial z}$$



## Equação Conservação de Energia (DU=DQ-DW)

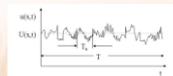
$$\frac{\partial(\bar{T})}{\partial t} + (\bar{u}) \frac{\partial(\bar{T})}{\partial x} + (\bar{v}) \frac{\partial(\bar{T})}{\partial y} + (\bar{w}) \frac{\partial(\bar{T})}{\partial z} - S_p \bar{\omega} = - \frac{\partial(\overline{u'T'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'T'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'T'})}{\partial z} + \frac{\bar{J}}{C_p}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{kg_{H_2O}}{kg_{ar}} = \bar{c}$$

$$u_3 = w$$

$$x_3 = z$$

$$\nu \frac{\partial^2(\bar{u}_3)}{\partial x_3^2} \cong 0$$



$$P = \rho RT$$

$$P = \rho gH$$

## Equação Conservação de Massa (eq continuidade) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial x_i} = \bar{S}_c \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \bar{S}_c - \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial(\bar{c})}{\partial t} + (\bar{u}) \frac{\partial(\bar{c})}{\partial x} + (\bar{v}) \frac{\partial(\bar{c})}{\partial y} + (\bar{w}) \frac{\partial(\bar{c})}{\partial z} = - \frac{\partial(\overline{u'c'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'c'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'c'})}{\partial z} + \bar{S}_c$$

# Desenvolvimento de Modelos Numéricos Para a Previsão de Tempo e Clima

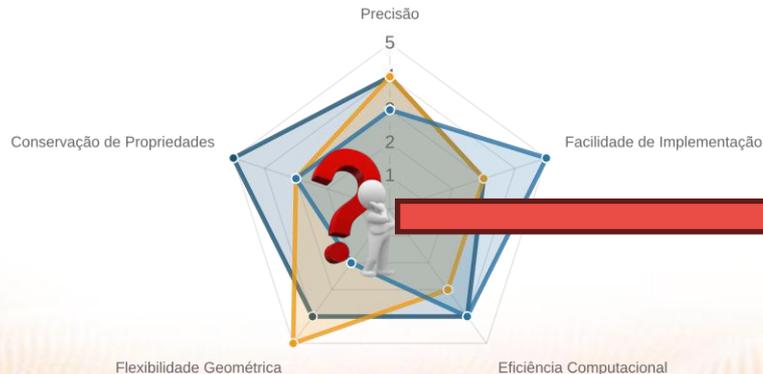
## Métodos Numéricos Computacionais

### O que são Métodos Numéricos?

**Métodos numéricos** são **conjuntos de regras e algoritmos** que **permitem** formular e **resolver problemas matemáticos** usando operações aritméticas.

São **essenciais** para encontrar soluções aproximadas para problemas complexos que **não podem ser resolvidos analiticamente**.

■ Diferenças Finitas ■ Elementos Finitos ■ Volumes Finitos



### Principais Métodos Numéricos

#### Método das Diferenças Finitas (MDF)

Aproxima derivadas por diferenças finitas baseadas na série de Taylor.

#### Método dos Elementos Finitos (MEF)

Divide o domínio em elementos não-intersectantes e resolve equações em cada elemento. Desenvolvido para sistemas rígidos (pontes)

#### Método dos Volumes Finitos (MVF)

Baseado na resolução de balanços de massa, energia e quantidade de movimento em volumes de controle. . Baseado nos Teorema de Stokes; Teorema de Green; Teorema de Gauss

#### Métodos Espectrais

Utilizam funções de base global para aproximar soluções de equações diferenciais. (computacionalmente muito caro (transformada espectrais) para malhas com alta resoluções)

# Métodos Numéricos Computacionais Método das Diferenças Finitas

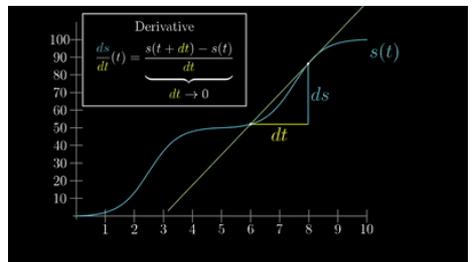
## Ordem de precisão

- Fundamenta-se na **expansão em Série de Taylor**.  
(**relaciona o espaço contínuo e o espaço discreto**)

- Não podemos utilizar a série completa, deve-se **truncar a serie de taylor**.

$$T(t, x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_j^n e^{-ik(j\Delta x)}$$

Então temos uma aproximação

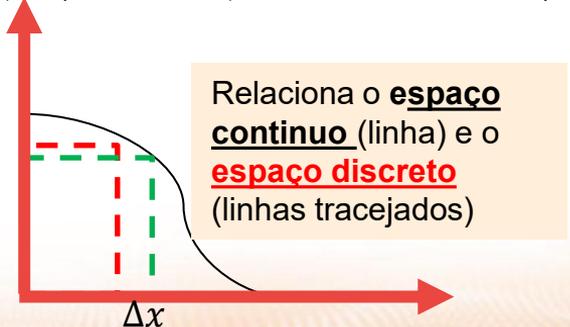


$$u_{j+1}^n = u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \dots \frac{\Delta x^p}{p!} \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$$

**Erro de truncamento**

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \dots \frac{\Delta x^p}{p!} \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$$

<https://www.youtube.com/watch?v=9vKqVkmQHKk&index=2&list=PLZHQOBOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO315>



## 3. Ordem de precisão x Erro de truncamento

- Mede o quão rápido o erro de truncamento diminui com o refinamento da malha.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{-2u_{j-1} + u_j + u_{j-2}}{6\Delta x} \right) - O[\Delta x^2]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{4u_{j-1} - 3u_j - u_{j+2}}{6\Delta x} \right) - O[\Delta x^2]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+2}^n - 9u_j^n + 8u_{j-1}^n}{10\Delta x} + \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{20\Delta x} + O[\Delta x^2]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+2}^n - 9u_j^n + 8u_{j-1}^n}{6\Delta x} + \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{4\Delta x} + O[\Delta x^3]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{4\Delta x} + \frac{-4u_{j-1} + 4u_j - u_{j+2} + u_j}{3\Delta x} - O[\Delta x^3]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{-u_{j+2} + 8u_{j+1} - 8u_{j-1} + u_{j-2}}{12\Delta x} \right) + O[\Delta x^4]$$

progressivo é  $O[\Delta x^1]$

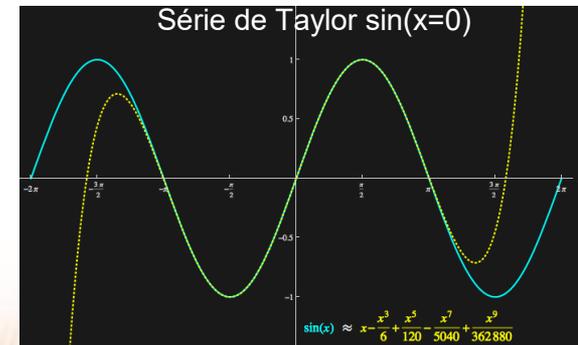
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O[\Delta x^1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O[\Delta x^1]$$

centrado é  $O[\Delta x^2]$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - O[\Delta x^2]$$

Então, porque não utilizamos o truncamento no termo de maior ordem?



### 2. Tipos de esquemas de diferenças



•Diferença progressiva (forward difference) **FTFS**

$$\frac{d u}{d x} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad O[\Delta x^1]$$

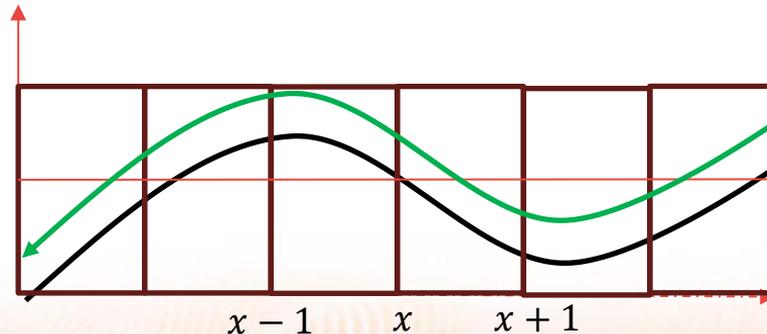
•Diferença regressiva (backward difference) **FTBS**

$$\frac{d u}{d x} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad O[\Delta x^1]$$

•Diferença central (central difference) **FTCS**

$$\frac{d u}{d x} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad O[\Delta x^2]$$

•Cada uma com precisão e estabilidade diferentes.



Discretizando **contra** o fluxo

Discretizando **a favor** do fluxo

# Métodos Numéricos Computacionais

## • Estabilidade diferentes Regime FTFS.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x}$$

$$(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = -u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+1}^n - \phi_i^n)$$

**Critério de estabilidade de von Neumann ( $|A| \leq 1$ ).**

$$|A|^2 = 1 + 2C(1 + C)(1 - \cos(k\Delta x)) \leq 1$$

$$2C(1 + C) \leq 0 \quad C = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

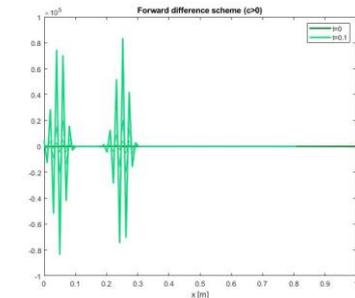
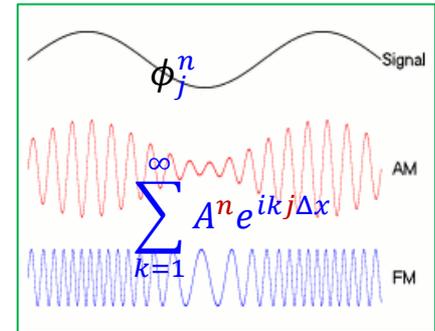
**A condição nunca pode ser satisfeita** Uma vez que  $C > 0$  pois  $u > 0$  (com  $u+$ )

$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Isto implica FTFS (com  $u+$ ) é incondicionalmente Instável!

Método de von Neumann

$$\phi_j^n = \phi(x_j, t_n) = \sum_{k=1}^{\infty} A^n e^{ikj\Delta x}$$



# Métodos Numéricos Computacionais

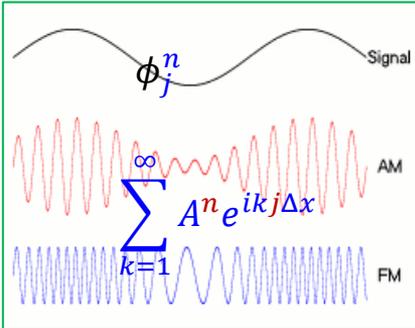
## Estabilidade diferentes Regime (FTBS).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = -u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n)$$

Método de von Neumann

$$\phi_j^n = \phi(x_j, t_n) = \sum_{k=1}^{\infty} A^n e^{ikj\Delta x}$$



**Critério de estabilidade de von Neumann ( $|A| \leq 1$ ).**

$$|A|^2 = 1 - 2C(1 - C)(1 - \cos(k\Delta x)) \leq 1$$

$$2C(1 - C) \geq 0$$

$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$C(1 - C) \geq 0$$

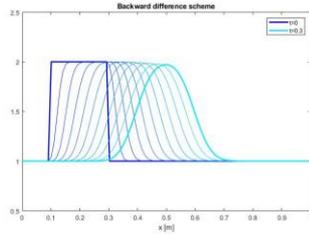
$$(1 - C) \geq 0$$

$$-C \geq -1$$

$$C \leq 1$$

$$C \geq 0 \text{ e } C \leq 1;$$

$$0 \leq C \leq 1;$$



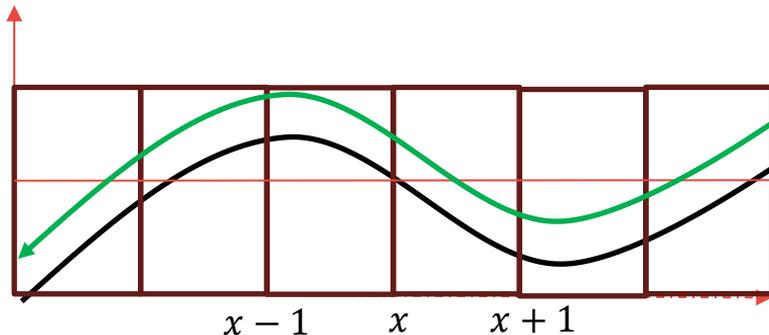
**O Esquema (FTBS) é estável para  $0 \leq C \leq 1$ ;**

# Métodos Numéricos Computacionais

## • Estabilidade diferentes Regime UpStream (FTFS + FTBS) .

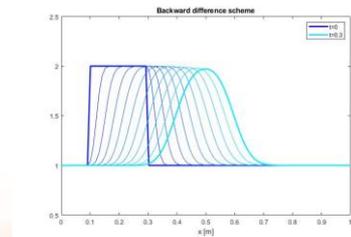
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + |u| \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x} \quad u > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + |u| \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x} \quad u < 0 \end{array} \right.$$



Discretizando **contra** o fluxo

Discretizando **a favor** do fluxo



**O Esquema UpStream (FTFS + FTBS) é estável para  $0 \leq C \leq 1$ ;**

# Métodos Numéricos Computacionais

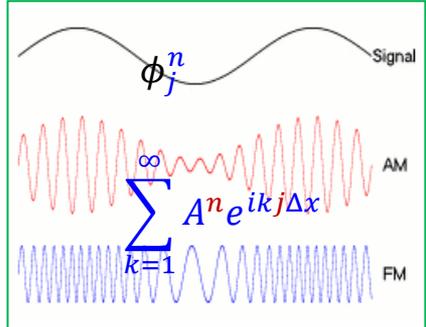
## Estabilidade diferentes Regime (FTCS).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = -u \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n)$$

### Método de von Neumann

$$\phi_j^n = \phi(x_j, t_n) = \sum_{k=1}^{\infty} A^n e^{ikj\Delta x}$$



### Critério de estabilidade de von Neumann (|A| ≤ 1).

$$|A| = \sqrt{((C * \cos(k\Delta x))^2 - 2C * \cos(k\Delta x) + 1)} \leq 1$$

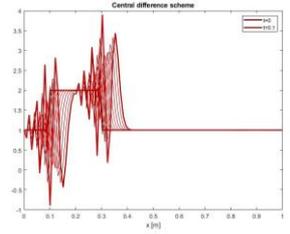
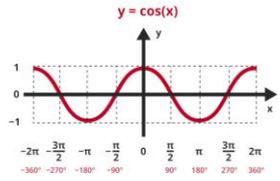
$$|A| = \sqrt{(x^2 - 2x + 1)}$$

$$x = C * \cos(k\Delta x) = 1 \Rightarrow |A| = 0$$

$$x = C * \cos(k\Delta x) = -1 \Rightarrow |A| = 2$$

$$C * \cos(k\Delta x) > -1$$

$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



**O Esquema (FTBS) é estável;**

# Métodos Numéricos Computacionais

## Estabilidade diferentes CTCS (Leapfrog)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\Delta t} + u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$(\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}) = -u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n)$$

**Critério de estabilidade de von Neumann** ( $|A| \leq 1$ ).

$$A = iC[\sin(k\Delta x)] \pm \sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

**1. o primeiro caso  $C > 1$ , e  $(C \sin(k\Delta x))^2 > 1$**

**2.  $C \leq 1$  e  $C(\sin(k\Delta x)) \leq 1$ . As duas raízes são:**

$$|A_+|^2 = (C^2(\sin^2(k\Delta x)) + 1 - C^2 \sin^2(k\Delta x))$$

$$|A_+|^2 = +1$$

$$|A_-|^2 = (C^2(\sin^2(k\Delta x)) + 1 - C^2 \sin^2(k\Delta x))$$

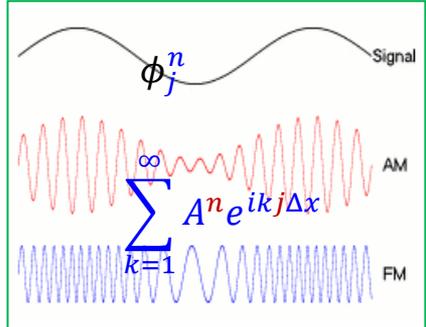
$$|A_-|^2 = +1$$

**Para o caso  $C \leq 1$  e  $C(\sin(k\Delta x)) \leq 1$  O Método CTCS é estável.**

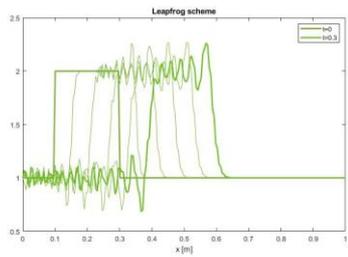
Método de von Neumann

$$\phi_j^n = \phi(x_j, t_n) = \sum_{k=1}^{\infty} A^n e^{ikj\Delta x}$$

$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



**Mas será que é :  
consistente ? e  
convergente(dt->0)?**



$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

### • Método explícito (ex.: Euler progressivo)

$$(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = -u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n)$$

$$(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = -C(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n)$$

$$(\phi_i^{n+1}) = (-C\phi_i^n + C\phi_{i-1}^n) + \phi_i^n$$

$$C\phi_{i-1}^n + (1 - C)\phi_i^n = \phi_i^{n+1}$$

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{bmatrix} C & (1 - C) & 0 \\ 0 & C & (1 - C) \\ (1 - C) & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{i-1}^n \\ \phi_i^n \\ \phi_{i+1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i^{n+1} \\ \phi_{i+1}^n \\ \phi_{i+2}^n \end{bmatrix}$$

### • Método implícito (ex.: Euler regressivo, Crank-Nicolson)

$$(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = -u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1})$$

$$(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = (-C\phi_i^{n+1} + C\phi_{i-1}^{n+1})$$

$$(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = (-C\phi_i^{n+1} + C\phi_{i-1}^{n+1})$$

$$-C\phi_{i-1}^{n+1} + (1 + C)\phi_i^{n+1} = \phi_i^n$$

### Solução de sistemas lineares

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{bmatrix} -C & (1 + C) & 0 \\ 0 & -C & (1 + C) \\ (1 + C) & 0 & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{i-1}^{n+1} \\ \phi_i^{n+1} \\ \phi_{i+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i^n \\ \phi_{i+1}^n \\ \phi_{i+2}^n \end{bmatrix}$$



• Relaciona-se à **estabilidade** e ao **custo computacional**.

## Solução de sistemas lineares

• Discretização leva a sistemas  $Au = b$ .

Necessário garantir que a matriz  $A$  seja diagonalmente dominante  $|A_{i,i}| \geq \sum_{j \neq i} |A_{i,j}|$

$$A \cdot x = b$$

### Resumo Comparativo

Método	Tipo	Complexidade	Vantagem	Desvantagem
LU	Direto	$O(n^3)$	Exato, eficiente para sistemas pequenos	Custo computacional alto para sistemas grandes
Thomas	Direto (tridiagonal)	$O(n)$	Rápido e eficiente para matrizes tridiagonais	Só aplicável a sistemas tridiagonais
Jacobi	Iterativo	$O(n^2)$	Simples e fácil de implementar	Lento para matrizes gerais
Gauss-Seidel	Iterativo	$O(n^2)$	Converge mais rápido que Jacobi	Lento para sistemas grandes
SOR	Iterativo	$O(n^2)$	Pode acelerar a convergência	Necessita escolher $\omega$ adequado
CG	Iterativo	$O(n^2)$	Muito eficiente para sistemas esparsos e grandes	Só para sistemas simétricos e definidos positivos

Você deve saber qual é o melhor método para o seu caso



## Estabilidade numérica

•Regra de CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) para métodos explícitos.

Número de Courant =>  $C = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$\phi_j^n = \phi(x_j, t_n) = A^n e^{ikj\Delta x}$$

condição de estabilidade CFL

$$0 \leq C \leq 1$$

$$|A|^2 \leq 1$$

$|A|^2 \leq 1$  Limita o crescimento da amplitude das ondas

•Métodos implícitos são mais estáveis, porém mais custosos.

$$(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) = -u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1})$$

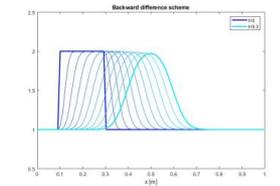
$$\phi_j^n = \phi(x_j, t_n) = A^n e^{ikj\Delta x}$$

$$|A|^2 = \frac{1}{(1 + 2C(1 + C)(1 - \cos(k\Delta x)))} \leq 1$$

Portanto Para qualquer numero de onda exceto para k=0,  $(1 - \cos(k\Delta x)) > 0$

$$2C(1 + C) > 0$$

$|A|^2 \leq 1 \Rightarrow$  incondicionalmente estável



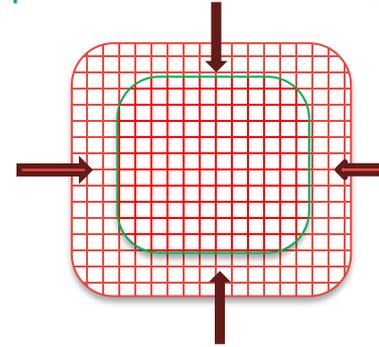
## Condições de contorno

As equações elípticas de segunda ordem requerem uma condição de contorno em cada ponto da fronteira espacial.

Esses são problemas **puros de valor contorno**, **independentes do tempo**.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} - O \left[ \frac{2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^2 \right]$$

- Impactam diretamente a montagem do sistema.



As condições de contorno podem ser:

- O valor da função (**problema de Dirichlet**), quando especificamos a temperatura na borda de uma chapa.
- A derivada normal (**problema de Neumann**), quando especificamos o fluxo de calor (PBL).
- Uma condição de contorno mista, envolvendo uma combinação linear da função e sua derivada (**problema de Robin**).



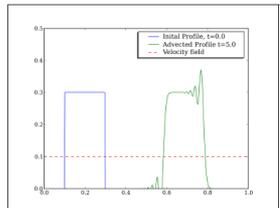
### Discretização no tempo

Método	Ordem de Precisão	Estabilidade e	Vantagens	Desvantagem	formulação
Euler	1ª ordem	Condicionamente estável	Simple, fácil de implementar	Menos preciso, instável para grandes $\Delta t$	$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot f(u_i^n)$
LeapFrog	2ª ordem	Pode ser instável	Mais precisos que Euler	Oscilante, pode ser instável	$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} + 2\Delta t \cdot f(u_i^n)$
Runge-Kutta (RK4)	4ª ordem	Estável	Alta precisão, bom para a maioria dos problemas	Mais caro computacionalmente	$k_1 = f(u_i^n) \quad ; \quad k_2 = f\left(u_i^n + \frac{\Delta t}{2} k_1\right);$ $k_3 = f\left(u_i^n + \frac{\Delta t}{2} k_2\right); \quad k_4 = f\left(u_i^n + \Delta t k_3\right)$ $u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
Adams-Bashforth	2ª ordem	Estável (para 2 passos)	Eficiência para problemas de longa duração	Requer múltiplos valores iniciais	$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot \left(\frac{3}{2}f(u_i^n) - \frac{1}{2}f(u_i^{n-1})\right)$
Adams-Bashforth	4ª ordem	Estável (para 4 passos)			$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot \left(\frac{55}{24}f(u_i^n) - \frac{59}{24}f(u_i^{n-1}) + \frac{37}{24}f(u_i^{n-2}) - \frac{9}{24}f(u_i^{n-3})\right)$

## Difusão Numérica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} = -c \frac{u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{\Delta x}$$



Expansão da série de Taylor para  $u_i^{\tau+1}$  e  $u_{i-1}^{\tau}$

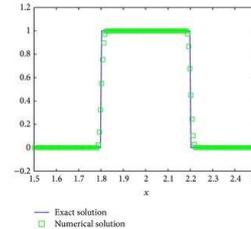
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} + v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} = v_c \frac{u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}}{\Delta x^2}$$

Expansão da série de Taylor para  $u_i^{\tau+1}$ ;  $u_{i+1}^{\tau}$  e  $u_{i-1}^{\tau}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_c \frac{\Delta x^2}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

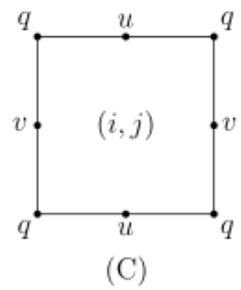
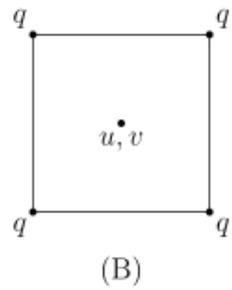
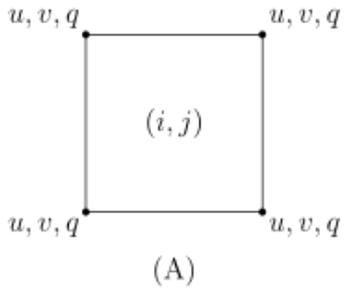


$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = +v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

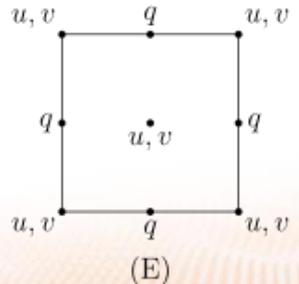
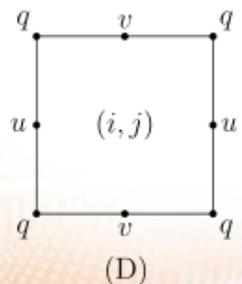
• **Esquemas de escalonamento de grade** (Arakawa (1966–1970))

Arakawa (1966–1970) introduziu diferentes **esquemas de escalonamento de grade** (grades A, B, C, D, E) para organizar onde variáveis como componentes de velocidade e grandezas escalares (pressão, temperatura) são armazenadas

O posicionamento das variáveis **afeta fortemente** a discretização de **termos não lineares** (advecção,  $u \cdot \nabla u$ ).



controla a conservação de energia e ênstropia.



**O famoso resultado de Arakawa:**

Ele projetou esquemas especiais de diferenças finitas (por exemplo, o **Jacobiano de Arakawa**) que conservam tanto a **energia cinética** quanto a **ênstropia** no sistema discreto — mesmo **sem dissipação artificial**.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = +v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$



# • Esquemas de escalonamento de grade (Arakawa (1966–1970))

Para o escoamento 2D incompressível em forma vorticidade–função-corrente:

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) = 0,$$

com o Jacobiano contínuo  $J(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$ .

No ponto  $(i, j)$  com passos  $\Delta x, \Delta y$ , defina três formas de segunda ordem e depois faça a média:

$$J^A(A, B) = \frac{1}{3} (J_1 + J_2 + J_3),$$

onde

$$J_1 = \frac{(A_{i+1,j} - A_{i-1,j})(B_{i,j+1} - B_{i,j-1}) - (A_{i,j+1} - A_{i,j-1})(B_{i+1,j} - B_{i-1,j})}{4 \Delta x \Delta y},$$
$$J_2 = \frac{A_{i+1,j}(B_{i+1,j+1} - B_{i+1,j-1}) - A_{i-1,j}(B_{i-1,j+1} - B_{i-1,j-1})}{4 \Delta x \Delta y} - \frac{A_{i,j+1}(B_{i+1,j+1} - B_{i-1,j+1}) - A_{i,j-1}(B_{i+1,j-1} - B_{i-1,j-1})}{4 \Delta x \Delta y},$$
$$J_3 = \frac{B_{i+1,j}(A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j-1}) - B_{i-1,j}(A_{i-1,j+1} - A_{i-1,j-1})}{4 \Delta x \Delta y} - \frac{B_{i,j+1}(A_{i+1,j+1} - A_{i-1,j+1}) - B_{i,j-1}(A_{i+1,j-1} - A_{i-1,j-1})}{4 \Delta x \Delta y}.$$

Intuição:  $J_1$  é a forma “padrão” centrada ( $A_x B_y - A_y B_x$ );  $J_2$  e  $J_3$  reordenam (skew-permutações) produtos ponto-fluxo e fluxos-ponto. A média simetriza o operador e mata aliasing espúrio.

## Conservação discreta de energia e enstrofia

Invariantes (sem forç./diss.):

$$E = \frac{1}{2} \int |\nabla \psi|^2 dA = \frac{1}{2} \int \psi \zeta dA, \quad Z = \frac{1}{2} \int \zeta^2 dA.$$

### Energia $E_d$

$$\frac{dE_d}{dt} = \frac{1}{2} \langle \partial_t \psi, \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi, \partial_t \zeta \rangle.$$

### Enstrofia $Z_d$

$$\frac{d\zeta}{dt} + J^A(\psi, \zeta) = 0, \quad \zeta = \nabla_h^2 \psi.$$

## • Esquemas de escalonamento de grade (Arakawa (1966–1970))

- **Em grades A,**

**Diferenças centradas** simples podem criar **modos computacionais** (padrões de tabuleiro de xadrez) e fontes espúrias de energia. **A conservação de energia é fraca**, a menos que uma **média/filtragem** especial seja adicionada.

- **Em grades B,**

A **representação das ondas de inércia-gravidade é ruim**, e erros de **aliasing** podem levar a um crescimento ou amortecimento espúrios de energia

- **Em grades C,**

A **conservação de energia é muito melhor**: o escalonamento alinha naturalmente os fluxos com seus volumes de controle. Com o **Jacobiano de Arakawa**, **invariantes quadráticos** (energia cinética, enstrofia, às vezes vorticidade potencial) **são conservados** exatamente **na ausência de forçantes e dissipação**.

- **Em grades D/E,**

As **propriedades de conservação também podem ser melhoradas**, mas são menos utilizadas na prática em comparação com a grade C.



• **Esquemas de escalonamento de grade** (Arakawa (1966–1970))

◆ **Por que é importante**

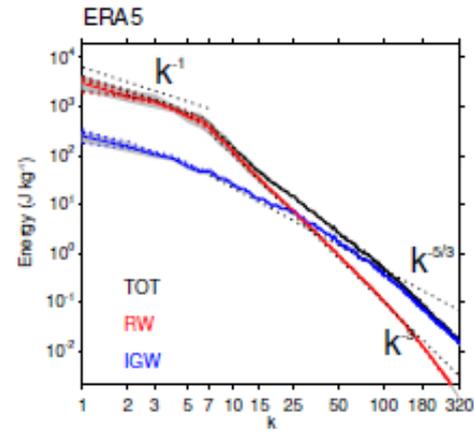
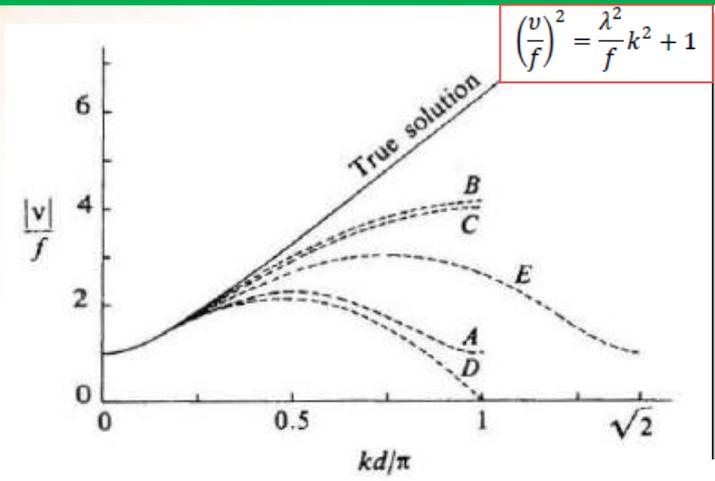
$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 kd, \quad (3.6)_A$$

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + 4 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2}, \quad (3.6)_B$$

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = \cos^2 \frac{kd}{2} + 4 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2}, \quad (3.6)_C$$

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = \cos^2 \frac{kd}{2} + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 kd, \quad (3.6)_D$$

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + 2 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{\sqrt{2}}, \quad (3.6)_E$$



**Estabilidade numérica:** Se a energia não for conservada, o modelo pode desenvolver crescimento espúrio ou amortecimento excessivo.

**Cascatas de turbulência realistas:** Em fluxos bidimensionais e quase geostróficos, a transferência correta de energia ↔ enstrofia é essencial.

**Modelagem climática:** Ao longo de integrações longas (décadas a séculos), **pequenos erros** de não conservação se acumulam e podem levar à flutuações climática.

## •Referências e Leituras Sugeridas

---

- Kalnay (2003) – Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability
- Manuals: WRF, ROMS, ECMWF documentation
- Artigos do IPCC, revistas como JGR, Weather and Forecasting